

Prof. Dr.-Ing. Karl Foppe

Fehlerlehre & Statistik 2017/2018

Vorlesung 127701/VBGM7701 und Übung 127702/VBGM7702



Das vorliegende Skript zur Vorlesung *Fehlerlehre und Statistik* soll den Studierenden zur Aufbereitung des Vorlesungsstoffes dienen und erhebt weder einen Anspruch auf Vollständigkeit noch einen Anspruch darauf, ein Lehrbuch ersetzen zu wollen. Insbesondere kann und will es den Studierenden einen regelmäßigen Besuch der Vorlesungen nicht ersparen.

Alle Formeln und Beispiele wurden mit viel Sorgfalt zusammengestellt. Trotzdem kann keine Gewähr (z.B. für Druck- oder Schreibfehler) übernommen werden.

Dieses Skript folgt der sogenannten „Hannoveraner Schule“ basierend auf den Vorlesungen von Prof. Dr.-Ing. Dr.h.c.mult. Hans Pelzer (†), der den Stoff als hervorragender Hochschullehrer exzellent aufzubereiten verstand, so dass ich ihn hier sehr gerne als Hauptquelle angebe. Natürlich wurden die Inhalte umfangreich ergänzt und werden stets aktualisiert. Schreibweise und Wahl der Formelzeichen erfolgt DIN- bzw. ISO-konform. Die Berechnung der Beispiele und das Plotten der Verteilungsfunktionen geschieht in den Übungen rechnergestützt mit Programmsystemen wie *Matlab*[®] bzw. dem gleichwertigen *Octave* (*freeware*).

Weitergabe – auch digital – nur in unveränderter Form. Nachdruck und kommerzielle Verwertung nicht ohne Genehmigung.

1 Softwarepakete für statistische Berechnungen

1.1 Tabellenkalkulationsprogramm EXCEL (Microsoft Office ©)

Das Softwarepaket Microsoft Office © ist an vielen Arbeitsplätzen bereits standardmäßig auf nahezu allen Arbeitsplatz-Rechnern bzw. PC installiert und steht somit zur Nutzung zur Verfügung. Insbesondere das Tabellenkalkulationsprogramm EXCEL bietet sich zur statistischen Analyse und Visualisierung an.

Analog zum Microsoft Office © bietet sich das Softwarepaket LibreOffice an. LibreOffice ist ein leistungsstarkes Office-Paket, das den kompletten Leistungsumfang des Microsoft Office-Pakets bietet. Auch in LibreOffice steht mit CALC eine Tabellenkalkulation zur Verfügung. Das Besondere ist: LibreOffice ist eine freie und quelloffene Software. Sie kann also uneingeschränkt ohne Beachtung eventueller Lizenzbeschränkungen frei genutzt werden. Die Entwicklung ist offen für neue Mitstreiter und neue Ideen. Die Software wird täglich von einer großen und engagierten Benutzer-Community verwendet und somit ständig getestet.

Beide Software-Pakete verfügen über alle grundlegenden Funktionen zur Verarbeitung großer Datenmengen, zur Durchführung von Berechnungen innerhalb in Tabellenform gespeicherter Daten sowie zur Visualisierung der Daten und der Ergebnisse. Der Funktionsumfang sowie der Vorrat an Befehlen zur Durchführung von vorinstallierten Berechnungen ist weitgehend identisch und absolut gleichwertig. Normalerweise kann man davon ausgehen, dass beide Systeme untereinander kompatibel sind und sich die mit einem System angelegten Tabellen auch mit dem anderen System öffnen und weiter verarbeiten lassen.

1.1.1 EXCEL-Schulungen

EXCEL ist in der Regel durch die IT-Administratoren vorinstalliert und wird durch die Verbreitung an vielen Arbeitsplätzen bereits umfassend genutzt. Eine Installation muss daher nicht durch Sie erfolgen.

Sollten Sie sich bereits mit EXCEL auskennen und Ihren eigenen Arbeitsstil gefunden haben, so müssen Sie sich keinesfalls umgewöhnen. Seien Sie versichert: Viele Wege führen zum Ziel.

Für den Fall, dass Ihnen die Grundkenntnisse zum Arbeiten mit EXCEL fehlen oder Sie Ihre Kenntnisse auffrischen oder erweitern wollen, stehen Ihnen umfangreiche Schulungen zum Selbststudium online oder zum Herunterladen zur Verfügung.

Online-Schulung in EXCEL:

<https://support.office.com/de-de/article/Excel-Schulung-9bc05390-e94c-46af-a5b3-d7c22f6990bb?ui=de-DE&rs=de-DE&ad=DE>

EXCEL-Schulungen zum Herunterladen:

<https://support.office.com/de-de/article/Office-2010-Schulungen-herunterladen-7f477c0f-d72f-4848-b960-98bf08d779ab>

1.2 Tabellenkalkulationsprogramm CALC (LibreOffice)

1.2.1 Installation von LibreOffice

LibreOffice hat zwar den Vorteil, eine freie und kostenlose Software zu sein, so dass Sie es umfassend ohne Lizenzrechte zu verletzen nutzen können, es ist jedoch normalerweise nicht standardmäßig bereits an allen Büro-Arbeitsplätzen installiert. Oftmals scheitert sogar der Versuch, es selbst am eigenen Arbeitsplatz zu installieren, da Ihnen als Standard-User nicht die notwendigen Nutzerrechte zum Installieren vorliegen.

Als Lösung bietet sich eine portable Installation des LibreOffice-Pakets beispielsweise auf einem USB-Stick (kann somit tatsächlich mitgenommen werden) oder auch direkt auf der Festplatte an.

Link zum Herunterladen der portablen LibreOffice-Versionen:

<https://de.libreoffice.org/download/portable-versions/>

1.2.2 CALC-Schulungen

Grundsätzlich sollten Sie nach dem Selbststudium der unter 1.1 genannten EXCEL-Kurse auch in der Lage sein, dieselben Aktionen und Rechenoperationen mit CALC durchzuführen. Aber auch für das LibreOffice-Paket sowie die Tabellenkalkulation CALC stehen Online-Schulungen zur Verfügung.

Online-Schulung in CALC:

<http://www.akademie.de/thema/openoffice-libreoffice>

1.3 Mathematische Software

1.3.1 MATLAB

MATLAB ist eine kommerzielle Software des US-amerikanischen Unternehmens MathWorks zur Lösung mathematischer Probleme. MATLAB bietet eine einfache und produktive Softwareumgebung, die in erster Linie von Ingenieuren und Wissenschaftlern genutzt wird. MATLAB dient nicht der symbolischen, sondern vorrangig der numerischen (zahlenmäßigen) Lösung von Problemen. Dazu sind große Toolboxen für nahezu alle denkbaren mathematischen Problemstellungen vorhanden. MATLAB zeichnet sich durch sehr hohe Rechengeschwindigkeiten aus.

Der Einstieg in MATLAB ist auch für unerfahrene Nutzer relativ einfach. Immer wiederkehrende Rechenschritte können in MATLAB in sogenannten „m-files“ abgespeichert werden. Diese „m-files“ bilden also kleinere „Programme“ oder auch „Skripte“, die in MATLAB als Interpreter beliebig oft ausgeführt werden können. MATLAB bietet sich

daher für die statistische Auswertung und Visualisierung außerordentlich an. Zur Durchführung muss jedoch eine lizenzierte, kommerzielle Version vorhanden sein, was nicht preiswert ist.

Für ein kommerzielles Softwarepaket dieser Größenordnung werden selbstverständlich auch kommerzielle Schulungen angeboten. Durch die große Verbreitung im wissenschaftlichen und Hochschul-Bereich, existieren aber auch genügend Materialien zum Selbststudium, die sich mit Hilfe von Suchmaschinen leicht finden lassen. Daher hier nur zwei Beispiele:

Link zum Herunterladen von MATLAB-Schulungsmaterial:

<https://www-m11.ma.tum.de/fileadmin/w00bnb/www/people/karpfinger/MATLAB-Tutorial.pdf>

Online-Schulung in MATLAB:

<http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs4/>

1.3.2 GNU Octave

Als Alternative zu MATLAB bietet sich die unter GNU-Lizenz stehende und somit frei verfügbare Software Octave an. Die von Octave verwendeten „Befehle“ und somit die „Skriptsprache“ ist von MATLAB abgeleitet und somit nahezu kompatibel. Die Funktionalität von GNU Octave entspricht weitgehend der Basisversion von MATLAB. Mit Hilfe weiterer Zusatzpakete wie *octave-forge* und Ersatzfunktionen des *Mathworks File-Exchange* lässt sich fast 100%ige Kompatibilität erreichen.

Für das GNU Octave existieren sehr viele Versionen und unterschiedliche Benutzeroberflächen für alle gängigen Betriebssysteme. Welche man nutzt, ist reine Geschmackssache. Dasselbe gilt für die online zur Verfügung stehenden Schulungsmaterialien oder Online-Kurse. Daher können mit den folgenden Links hier nur Beispiele gegeben werden:

Link zum Herunterladen verschiedenster Octave-Versionen:

<https://www.gnu.org/software/octave/download.html>

Link zum Herunterladen des Octave-Schulungsmaterial:

<https://www.gnu.org/software/octave/octave.pdf>

Online-Schulung in Octave:

<http://math.jacobs-university.de/oliver/teaching/tuebingen/octave/octave/octave.html>

2 Mathematische Grundlagen

2.1 Matrizenalgebra

Allgemein versteht man unter einer „Matrix“ (plural „Matrizen“) eine rechteckige Anordnung von Elementen in einer *Art Tabellenform*. Bei den Elementen handelt es sich im Falle von mathematischen Problemen generell um Zahlen, die in Zeilen und Spalten *tabellenförmig* angeordnet sind.

Matrizen können beliebige Dimensionen annehmen. Im Falle dieser Vorlesung gehen wir generell von 2-dimensionalen Matrizen aus. Sollten die Daten in einer einzigen Zeile oder Spalte vorliegen, sprechen wir von einem „Vektor“. Eine einzelne Zahl wird als „Skalar“ bezeichnet, kann aber auch als eine einzeilige und einspaltige Matrix aufgefasst werden.

Viele erhobene Daten liegen heutzutage in Tabellenform vor. Liest man Datensätze in eine Software ein, so geschieht dies in der Regel spaltenweise, so dass die einzelnen Daten-Elemente untereinander stehen, oder zeilenweise, so dass die Daten in einer Zeile hintereinander, gegebenenfalls mit sogenannten „Trennzeichen“ abgespeichert werden. Diese Datenreihen entsprechen formell Vektoren oder Matrizen.

Mit Vektoren und Matrizen können nach den Regeln der Matrizenalgebra beliebige Rechenoperationen ausgeführt werden. Insbesondere komplexe Gleichungssysteme und die Verarbeitung großer Zahlenmengen lassen sich mit Hilfe der Matrizenalgebra übersichtlich darstellen und lösen. Daher bietet sich die Matrizenschreibweise nicht nur für die Programmierung sondern ganz besonders für die Durchführung statistischer Auswertungen sowohl durch Auswertung mittels mathematischer Software (Abschnitt 1.3) als auch für die Anwendung von Tabellenkalkulationen an (Abschnitt 1.2). Die eigentlichen mathematischen Operationen übernimmt das Tabellenkalkulationsprogramm. Jedoch sind zum Verständnis der mathematischen Hintergründe und der Auswerteabläufe Grundkenntnisse der Matrizenalgebra durchaus hilfreich.

2.1.1 Notation

Die Schreibweise von Matrizen war eindeutig geregelt in der Norm DIN 5486, welche jedoch mittlerweile vom DIN zurückgezogen wurde. Diese Norm wird jedoch noch immer von anderen Normen zitiert wie z.B. in folgender Form:

	Begriffe, Kurzzeichen und Formelzeichen im Vermessungswesen Ausgleichsrechnung und Statistik	DIN 18 709 Teil 4
--	--	---------------------------------------

Wo dies zweckmäßig ist, wird weitestgehend von der Matrizenalgebra Gebrauch gemacht nach DIN 5486. Die Matrizensymbole sind in Antiqua (halbfett) zu setzen. In Schreibmaschinentexten sollten die Matrizensymbole durch Unterstreichen kenntlich gemacht werden.

Das Kenntlichmachen von Matrizensymbolen durch Unterstreichen hat eher Bedeutung bei der handschriftlichen Darstellung. Der Hinweis zu Schreibmaschinentexten ist heutzutage eigentlich komplett obsolet. Jedoch bedenke man, dass auch ein compu-

tergeschriebener, hochwertiger Laser-Ausdruck in „halbfett“ spätestens in der dritten Fotokopie einer Kopie nicht mehr als „Halbfettdruck“ erkennbar ist.

Mit modernen Textverarbeitungen o.ä. ist ein entsprechender Satz auch von Formeln problemlos möglich:

	Skalare : x Zufallsgrößen Messwerte etc.	Matrizen : \mathbf{x} oder \underline{x} $\mathbf{x}_{u,1}$ oder $\underline{x}_{u,1}$
Bewährter „Hochschulkompromiss“ ist eine Kombination aus Fettdruck und Unterstreichung: $\underline{\mathbf{x}}_{u,1}$		

2.1.2 Darstellung von Matrizen und deren Elementen

Eine Matrix oder auch ein Vektor besteht aus mehreren Elementen. Um die Dimension (Größe) einer Matrix anzugeben, gibt man unter dem Matrixsymbol $\mathbf{a}_{z,s}$ die Anzahl der Zeilen z und Anzahl der Spalten s der Matrix an.

Ein bestimmtes Element a_{jk} innerhalb der Matrix $\mathbf{a}_{z,s}$ beschreibt man durch Angabe zweier Indices j und k ; der Zeilennummer j und der Spaltennummer k . Bei Vektoren reicht die Angabe eines Indexes aus. Durch Transponieren der Matrix, was durch ein hochgestelltes T am Matrixsymbol $\mathbf{a}_{s,z}^T$ kenntlich gemacht wird, tauschen die Elemente der Matrix ihre Zeilen- und Spaltennummer.

Vektor: $\mathbf{a}_{3,1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$

Transponierter Vektor: $\mathbf{a}_{1,3}^T = [a_1 \ a_2 \ a_3]$

Matrix: $\mathbf{a}_{3,2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$

Transponierte Matrix: $\mathbf{a}_{2,3}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}$

2.1.2 Addition, Subtraktion und Multiplikation von Vektoren

Zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} lassen sich elementweise addieren bzw. subtrahieren, wenn die Anzahl der Zeilen z in beiden Vektoren identisch ist, bzw. bei einzeiligen Vektoren, wenn die Anzahl der Spalten identisch ist.

Vektoren: $\mathbf{a} = \begin{matrix} z,1 \\ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \end{matrix}$ $\mathbf{b} = \begin{matrix} z,1 \\ \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \end{matrix}$

Addition: $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{matrix} 3,1 \\ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \end{matrix} + \begin{matrix} 3,1 \\ \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} 3,1 \\ \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix} \end{matrix}$

$$\mathbf{c}^T = \mathbf{a}^T + \mathbf{b}^T = \begin{matrix} 1,3 \\ [a_1 \ a_2 \ a_3] \end{matrix} + \begin{matrix} 1,3 \\ [b_1 \ b_2 \ b_3] \end{matrix} = \begin{matrix} 1,3 \\ [a_1 + b_1 \ a_2 + b_2 \ a_3 + b_3] \end{matrix}$$

Subtraktion: $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{matrix} 3,1 \\ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \end{matrix} - \begin{matrix} 3,1 \\ \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} 3,1 \\ \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{bmatrix} \end{matrix}$

$$\mathbf{c}^T = \mathbf{a}^T - \mathbf{b}^T = \begin{matrix} 1,3 \\ [a_1 \ a_2 \ a_3] \end{matrix} - \begin{matrix} 1,3 \\ [b_1 \ b_2 \ b_3] \end{matrix} = \begin{matrix} 1,3 \\ [a_1 - b_1 \ a_2 - b_2 \ a_3 - b_3] \end{matrix}$$

Zur Multiplikation zweier Vektoren \mathbf{a}^T und \mathbf{b} (hier die Faktoren) sind jeweils die Zeilen des ersten Faktors (Multiplikators) mit den Spalten des zweiten Faktors (Multiplikand) elementweise zu multiplizieren und danach aufzusummieren. Demnach kann eine Multiplikation nur durchgeführt werden, wenn der Multiplikator genauso viele Spalten hat wie der Multiplikand Zeilen.

Multiplikation:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \begin{matrix} 1,1 \\ [a_1 \ a_2 \ a_3] \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 3,1 \\ \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \end{matrix} = [a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3] = [c_1]$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T = \begin{matrix} 3,3 \\ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 1,3 \\ [b_1 \ b_2 \ b_3] \end{matrix} = \begin{matrix} 3,3 \\ \begin{bmatrix} a_1 \cdot b_1 & a_1 \cdot b_2 & a_1 \cdot b_3 \\ a_2 \cdot b_1 & a_2 \cdot b_2 & a_2 \cdot b_3 \\ a_3 \cdot b_1 & a_3 \cdot b_2 & a_3 \cdot b_3 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} 3,3 \\ \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Die Reihenfolge, in der man multipliziert gibt die Dimension des Ergebnisses vor. Es ist also entscheidend, ob man „von links“ oder „von rechts“ mit einem Vektor multipliziert.

Multiplikationsregeln:

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}^T \text{ aber } \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{a}$$

bzw.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T \neq \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{a} \text{ aber } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}^T$$

2.1.3 Addition, Subtraktion und Multiplikation von Matrizen

Analog zu 2.1.2 lassen sich zwei Matrizen \mathbf{a} und \mathbf{b} elementweise addieren bzw. subtrahieren, wenn die Dimension der Matrix – also Anzahl der Zeilen z und der Spalten s – in beiden Matrizen identisch ist

Matrizen:

$$\mathbf{a} = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \quad \mathbf{b} = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{matrix}$$

Addition:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} + \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{matrix} = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{matrix}$$

$$\mathbf{c}^T = \mathbf{a}^T + \mathbf{b}^T = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{matrix} + \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \end{matrix} = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} a_{11} + b_{11} & a_{21} + b_{21} & a_{31} + b_{31} \\ a_{12} + b_{12} & a_{22} + b_{22} & a_{32} + b_{32} \end{matrix}$$

Subtraktion:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} - \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{matrix} = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \\ a_{31} - b_{31} & a_{32} - b_{32} \end{matrix}$$

$$\mathbf{c}^T = \mathbf{a}^T - \mathbf{b}^T = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{matrix} - \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \end{matrix} = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} a_{11} - b_{11} & a_{21} - b_{21} & a_{31} - b_{31} \\ a_{12} - b_{12} & a_{22} - b_{22} & a_{32} - b_{32} \end{matrix}$$

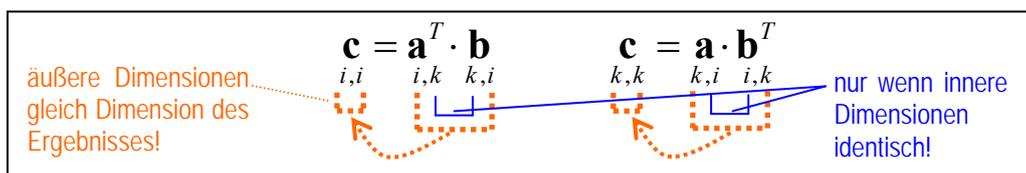
Auch analog zu 1.2.2 sind zur Multiplikation zweier Matrizen \mathbf{a}^T und \mathbf{b} (hier die Faktoren) jeweils die Zeilen des ersten Faktors (Multiplikators) mit den Spalten des zweiten Faktors (Multiplikand) elementweise zu multiplizieren und danach aufzusummieren.

Multiplikation:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{matrix} = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{21} \cdot b_{21} + a_{31} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{21} \cdot b_{22} + a_{31} \cdot b_{32} \\ a_{12} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{32} \cdot b_{31} & a_{12} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{32} \cdot b_{32} \end{matrix} = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{matrix}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \end{matrix} = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{12} & a_{11} \cdot b_{21} + a_{12} \cdot b_{22} & a_{11} \cdot b_{31} + a_{12} \cdot b_{32} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{12} & a_{21} \cdot b_{21} + a_{22} \cdot b_{22} & a_{21} \cdot b_{31} + a_{22} \cdot b_{32} \\ a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{12} & a_{31} \cdot b_{21} + a_{32} \cdot b_{22} & a_{31} \cdot b_{31} + a_{32} \cdot b_{32} \end{matrix} = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{matrix}$$

Die Reihenfolge, in der man multipliziert, gibt wieder die Dimension des Ergebnisses vor. Es ist also erneut entscheidend, ob man „von links“ oder „von rechts“ mit einer Matrix multipliziert und es kann auch hier eine Multiplikation nur erfolgen, wenn der Multiplikator genauso viele Spalten hat wie der Multiplikand Zeilen.



2.1.4 Formen von Matrizen

In der Literatur findet man oftmals Bezeichnungen für Matrizen die einzig von deren äußerer Erscheinung abgeleitet sind, jedoch durchaus Charakteristika bei deren Verwendung in Rechenoperationen verraten.

"hohe Matrix"

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

"breite Matrix"

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

"unteres Dreieck"

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

"oberes Dreieck"

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix}$$

quadratisch

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

quadratisch, symmetrisch

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}$$

Diagonalmatrix

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix}$$

Einheitsmatrix

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Große Bedeutung kommt der Einheitsmatrix $\mathbf{I}_{n,n}$ zu, deren Bedeutung einer „1“ gleich kommt.

2.1.5 Spur, Determinante, Rang einer Matrix

Spur einer Matrix

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow Sp(\mathbf{c}) = c_{11} + c_{22} + c_{33}$$

Determinante einer Matrix

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{c}) = c_{11} \cdot c_{22} - c_{12} \cdot c_{21}$$

Rang einer Matrix

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow Rg(\mathbf{c}) = \begin{cases} \text{Anzahl linear} \\ \text{unabhängiger} \\ \text{Spalten/Zeilen} \end{cases}$$

wenn $\det(\mathbf{c}) = 0 \Rightarrow Rg(\mathbf{c}) < \text{Zahl der Spalten } n \text{ von } \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{c} \text{ ist singular}$

wenn $\det(\mathbf{c}) \neq 0 \Rightarrow Rg(\mathbf{c}) = \text{Zahl der Spalten } n \text{ von } \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{c} \text{ ist regulär}$

2.1.6 Inversion einer Matrix

In den oben behandelten Rechenregeln fehlt bisher die Division mit einer Matrix. Generell lässt sich nicht „durch eine Matrix teilen“.

Aus der Mathematik wissen wir, dass man statt „durch eine Zahl zu teilen“ genauso gut mit deren Kehrwert multiplizieren kann. Also statt „durch 2 zu teilen“ können wir genauso mit $\frac{1}{2}$ multiplizieren.

Als eine Definition für die Division kann man sich überlegen, dass man „1“ herausbekommen muss, wenn man eine Zahl mit ihrem Kehrwert multipliziert; also $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ bzw.

$\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$. Dies lässt sich auf Matrizen übertragen, indem man zu einer Matrix \mathbf{c} deren inverse Matrix \mathbf{c}^{-1} mit genau diesen Eigenschaften sucht.

Inverse einer Matrix

$$\mathbf{c}_{2,2} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{2,2}^{-1} = \left(\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \right)^{-1} \Rightarrow \mathbf{c}_{2,2} \cdot \mathbf{c}_{2,2}^{-1} = \mathbf{I}_{2,2} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{c}_{2,2}^{-1} \cdot \mathbf{c}_{2,2} = \mathbf{I}_{2,2}$$


 existiert nur, wenn Matrix \mathbf{c} regulär !

3 Begriffsdefinitionen

3.1 Statistik allgemein

Definitionen

Statistik: von „staticum“ (lat.) „den Staat betreffend“ oder „Zustandsbeschreibung des Staates“ (=> z.B. Aufzeichnung von Geburten oder Sterbefällen in Kirchenbüchern)

Statistik: „... ist die Lehre von Methoden zum Umgang mit quantitativen Informationen (Daten). Sie ist eine Möglichkeit, eine systematische Verbindung zwischen Erfahrung (Empirie) und Theorie herzustellen. Sie ist damit unter anderem die Zusammenfassung bestimmter Methoden, um empirische Daten zu analysieren. (WIKIPEDIA, 2011)

Statistische Grundaufgaben: Beschreiben, Schätzen, Entscheiden

Schluss von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit

(SACHS, Angewandte Statistik, 1996)

Typische Fragestellungen in der Geodäsie (Kuhlmann/Schwieger 2001)

- Wie genau ist meine Streckenmessung?
- Ist die Genauigkeit der Winkelmessung ausreichend um eine Koordinate auf 2 cm zu bestimmen?
- Wie berechne ich die Genauigkeit für eine Funktion der Beobachtungen?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit überschreitet ein Messwert einen vorgegebene Grenzwert?

3.2 Der Begriff des „Fehlers“ in der Geodäsie

„Fehlerfreie“, vollkommen perfekte Messungen (Beobachtungen) ohne jegliche Abweichungen sind infolge von Geräteungenauigkeiten, Verbliebenen Restfehlern (nach Kalibrierung/Justierung), der Unzulänglichkeit der menschlichen Sinne und anderen äußeren Einflüssen (Umwelt) nicht möglich.

(Geodätische) Messungen müssen im Hinblick auf ihren jeweiligen Zweck mit einer anwendungsorientierten Genauigkeit ausgeführt werden.

Um die Genauigkeit einer Messung zu erhöhen und aus Kontrollgründen, werden die Beobachtungen (= Messungen) in der Regel mehrere Male wiederholt.

Der häufig verwendete Begriff „Fehler“ ist eigentlich so nicht richtig und somit zu vermeiden. Meist handelt es sich lediglich um „Abweichungen“.

Keine andere Ingenieurwissenschaft spricht in ihrer Fachterminologie davon, dass sie „Fehler macht“! Warum sollte die Geodäsie dies tun und sich unter Wert verkaufen?

Aufgaben der Fehlerlehre

Bei der Auswertung der Messungen entstehen die folgenden Aufgaben:

- aus den Beobachtungen den wahrscheinlichsten Wert der gesuchten Größe ableiten (z.B. Mittelwert)
- eine Maßzahl für die Genauigkeit einer einzelnen Beobachtung der Messreihe angeben (z.B. Standardabweichung)
- die Genauigkeit des Mittelwerts und dessen Vertrauensbereich abschätzen
- die Genauigkeit von aus beobachteten Werten abgeleiteten Größen abschätzen („Fehlerfortpflanzung“).

Fehlerarten bzw. Arten von Abweichungen

Fehlerart	Beschreibung	Ursache	Bekämpfung
Grobe Fehler	absolut fehlerhafte Messwerte, z.B. <i>Irrtümer, Verwechslungen, Zahlendreher</i>	Meist zurückzuführen auf menschliches Versagen	Unabhängige Kontrollmessungen und -rechnungen
Systematische Abweichung früher Systematische Fehler	Nicht beherrschbare oder unbekannte Fehlereinflüsse, die bei gleichen Bedingungen immer mit dem gleichen Vorzeichen im selben Sinn wirken, z.B. <i>Temperatur, Refraktion, Kalibrierfehler</i>	Fehlerhaft/unzureichende Kalibrierung, systematische Einflüsse (Temperatur, Wind, etc.), fehlerhafte Bedienung	Lassen sich <u>nicht</u> durch Wiederholungsmessungen eliminieren => sorgfältige Kalibrierung, geeignete Messverfahren und -prinzipien
Zufällige Abweichung früher Zufällige Fehler	Nach Abzug der anderen Fehler verbleibende Einflüsse zufälliger Natur (unterschiedliche Vorzeichen) Entstehen durch Zusammenwirken vieler kleiner Einzelanteile (Elementarfehler)	Unvollkommenheit der menschlichen Sinne und der Messinstrumente, zufällige Veränderungen der Umweltbedingungen	Einfluss durch Messhäufung (Wiederholungsmessungen) zu mindern. Liefern zusammen mit Werkzeugen der Statistik ein Maß für die Güte der Messung

4 Zufallsgrößen

4.1 Grundbegriffe

4.1.1 Zufallsgröße X :

- ist das durch eine Zahl ausgedrückte Ergebnis eines Experiments, dessen Ausgang innerhalb gewisser Grenzen ungewiss ist.
- Kann in einem bestimmten Wertebereich verschiedene Werte annehmen (Messwert x_i)
- Für jeden Messwert x_i lassen sich die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten $P(x_i)$ angeben

4.2 Klassifizierung

4.2.1 Diskrete Zufallsgröße

Der Wertebereich besteht aus abzählbar vielen, diskreten Werten

$$W(X) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$$

- Beispiele:
- Die Augenzahl bei einem Würfelspiel mit zwei Würfeln ist eine Zufallsgröße, deren Wertebereich nur (ganze, einzelne) Zahlen 2, 3, ..., 12 umfasst.
 - Ergebnis beim Roulette
 - Sieger beim Pferderennen (*Startnummer*)

Wegen der Beschränkung auf *diskrete Zahlen* spricht man von einer *diskreten Zufallsgröße*.

Die folgenden Beispiele 1 und 2 verdeutlichen dies recht anschaulich.

Beispiel 1: Münze „Kopf oder Zahl“

Bei einer symmetrischen Münze ist nach unendlich vielen Würfeln das Ergebnis „Kopf“ genauso wahrscheinlich wie das Ergebnis „Zahl“. Also mathematisch: Wie groß ist demnach die Wahrscheinlichkeit (Probability P) für „Kopf“ bzw. für „Zahl“?

$$\text{für } n \rightarrow \infty: P(\text{„Kopf“}) = P(\text{„Zahl“}) = \frac{1}{2} = 50\%$$

Beispiel 2: Wahrscheinlichkeiten bei einem einzigen Würfel

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (Probability P) für ein Ergebnis bei einem symmetrischen Würfel nach unendlich vielen Würfeln?

Die Wahrscheinlichkeit ist für alle sechs Möglichkeiten gleich groß:

$$\text{für } n \rightarrow \infty: P(\text{I}) = P(\text{II}) = P(\text{III}) = P(\text{IV}) = P(\text{V}) = P(\text{VI}) = 1/6 = 16,67\%$$

Definition: Falls bei einem Experiment n sich gegenseitig ausschließende und gleichmögliche Ergebnisse erzielt werden können und falls n_A dieser Ergebnisse mit dem Ereignis A verbunden sind, dann ist die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ des Ereignisses A :

$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

Problem: gilt nur für Experimente mit vorhersagbaren Ereignissen!

Beispiel 3: Wahrscheinlichkeiten bei einem einzigen Würfel

Bei insgesamt 300 Würfeln mit einem symmetrischen Würfel wurde 48 x \square und 51 x \square gewürfelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (Probability P), dass entweder eine \square oder eine \square gewürfelt wird?

Empirisch: $P(A) = \frac{n_A}{n} \Rightarrow P(\square \text{ oder } \square) = \frac{(48 + 51)}{300} = 0,330 = 33,0\%$

Theoretisch: $P(\square) + P(\square) = 1/6 + 1/6 = 2/6 = 0,3333 = 33,33\%$

für ein Ergebnis bei einem symmetrischen Würfel nach unendlich vielen Würfeln?

Die Wahrscheinlichkeit ist für alle sechs Möglichkeiten gleich groß:

für $n \rightarrow \infty$: $P(\square) = P(\square) = P(\square) = P(\square) = P(\square) = P(\square) = 1/6 = 16,67\%$

Beispiel 4: Wahrscheinlichkeiten beim Wurf einer Münze

4a: Eine symmetrische Münze wird jeweils 3x nacheinander geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (Probability P), dass als Ergebnis der drei Würfe 3x Zahl erscheint?

Es wird anschaulich, wenn man sich alle möglichen Fälle aufzeichnet, wie oft „Kopf“ („0“) bzw. wie oft „Zahl“ („X“) erscheinen kann.

- 1.: X X X
- 2.: 0 X X
- 3.: X 0 X
- 4.: X X 0
- 5.: 0 0 X
- 6.: 0 X 0
- 7.: X 0 0
- 8.: 0 0 0

Es existieren 8 gleich wahrscheinliche Möglichkeiten:

Daher ist die Wahrscheinlichkeit für den Fall, dass 3x nacheinander „Zahl“ („X“) erscheint: $P(\text{„X X X“}) = 1/8 = 0,125 = 12,5\%$

4b: Wieder wird die symmetrische Münze jeweils 3x nacheinander geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (Probability P), dass als Ergebnis der drei Würfe 2x „Zahl“ („X X“) erscheint?

Das Ergebnis 2x „Zahl“ („X X“) erhält man zusammen mit jeweils 1x „Kopf“ („0“) in den drei Fällen 2., 3. und 4., aber auch einmal im Fall 1. mit 3x „Zahl“ („X X X“). Alle Fälle haben dieselbe Wahrscheinlichkeit $P = 1/8$:

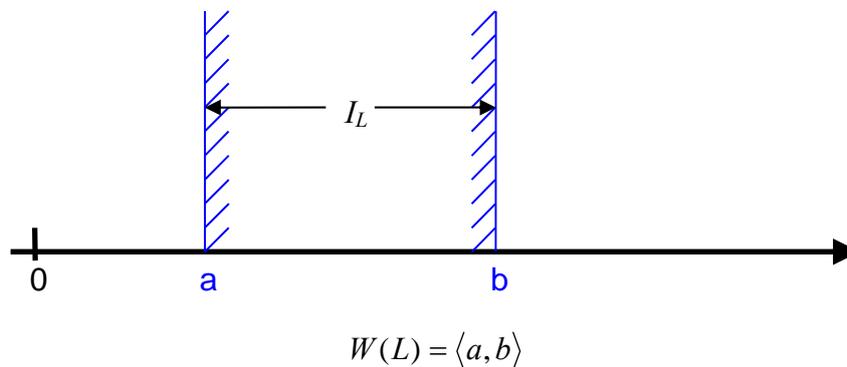
$$P(\text{„X X“}) = 3/8 + 1/8 = 4/8 = 1/2 = 0,5 = 50,0\%$$

4c: Fragt man bei der jeweils 3x nacheinander geworfenen symmetrischen Münze danach, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (Probability P) ist, dass als Ergebnis der drei Würfe das gleiche Ergebnis erscheint, so trifft dies nur für zwei der acht Möglichkeiten zu nämlich „0 0 0“ und „X X X“:

$$P(„0 0 0“) + P(„X X X“) = 1/8 + 1/8 = 1/4 = 0,25 = 25\%$$

4.2.2 Stetige Zufallsgröße

Der Wertebereich ist ein Intervall I_L auf der Zahlengeraden



$$l_j \in I_L \quad \text{mit } j = 1, 2, 3, \dots, n$$

n Realisierungen l_j (Beobachtungswerte) für die Zufallsgröße L .

Anwendung: Für das Ergebnis einer Streckenmessung zwischen zwei gegebenen Punkten ist bei einer genügend feinen Auflösung innerhalb gewisser Grenzen (Intervall) jeder Zahlenwert denkbar. Derartige Zufallsgrößen werden stetig genannt.

Messgröße: Werden die Werte einer Zufallsgröße durch direkte Messung bestimmt, spricht man von einer Messgröße, bezeichnet mit L .

Realisierungen: Die Messwerte l_j , ($j=1, 2, \dots, n$) sind Realisierungen der Messgröße L . Die Realisierungen liegen oft in diskreten Abständen vor.

Stichprobe:

- Menge der Beobachtungswerte (Realisierungen)
- Umfang n der Stichprobe (Anzahl der Realisierungen)
- **Grundgesamtheit** ($n \rightarrow \infty$)

Beispiel 1: Körpergröße aller Studierenden

- Wertebereich: $W(L) = \langle 0, \infty \rangle$ z.B. $W(L) = \langle 1.00m, 2.50m \rangle$
- Grundgesamtheit: Alle Studierenden einer bestimmten Population
- Stichprobe: z.B. n Studierende Ihres aktuellen Semesters in NB
- Beobachtung l_j : Körpergröße von Student(in) j

Beispiel 2: Länge einer Strecke zwischen zwei Punkten

- Wertebereich: $W(L) = \langle 0, \infty \rangle$ z.B. $W(L) = \langle 99.000m, 100.000m \rangle$
- Grundgesamtheit: Alle denkbaren Messergebnisse im Intervall
- Stichprobe: z.B. n Messwerte l_j für die Strecke
- Beobachtung l_j : Messwert Nummer j von n

- Unterschied:
- Streckenlänge L besitzt einen wahren Wert \tilde{L} und einen Mittelwert \bar{L} , auch wenn wir den wahren Wert nur sehr selten wirklich kennen.
 - Körpergröße L besitzt keinen wahren Wert \tilde{L} , bestenfalls einen Mittelwert \bar{L}

Beispiel 3: Temperaturmessung mit einem Thermometer

- Wertebereich: $W(L) = \langle 0, \infty \rangle$ z.B. $W(L) = \langle -40^\circ C, +40^\circ C \rangle$
- Grundgesamtheit: Alle denkbaren Messergebnisse im Intervall
- Stichprobe: z.B. n Ablesungen l_j für die Temperatur
- Beobachtung l_j : Ablesung Nummer j von n

- Unterschied:
- Streckenlänge L besitzt einen wahren Wert \tilde{L} und einen Mittelwert \bar{L} , auch wenn wir den wahren Wert nur sehr selten wirklich kennen.
 - Körpergröße bzw. Temperatur L besitzt keinen wahren Wert \tilde{L} , bestenfalls einen Mittelwert \bar{L}

4.3 Verteilung einer Zufallsgröße

4.3.1 Häufigkeitsfunktion und Wahrscheinlichkeitsdichte

- Problem: Größere Beobachtungsreihen werden schnell unübersichtlich
 Ziel: Komprimierung der Information
 Lösung: Klassifizierung der Beobachtungen

Die Messgröße L ist n -mal bestimmt worden. Man spricht von einer **Stichprobe** vom Umfang n .

$$l_j, j = 1, 2, \dots, n.$$

Messwerte l_j werden bei Wiederholungsmessungen seltenst denselben Zahlenwert annehmen, sondern entsprechend den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung innerhalb eines gewissen Bereichs um einen (theoretischen) Mittelwert (den Erwartungswert μ) zufällig streuen. Messwerte l_j liegen also innerhalb eines bestimmten Intervalls $[a, b]$

$$a \leq l_j \leq b, \forall l_j.$$

Das Intervall $[a, b]$ lässt sich in m Klassen K_i der Breite Δx einteilen

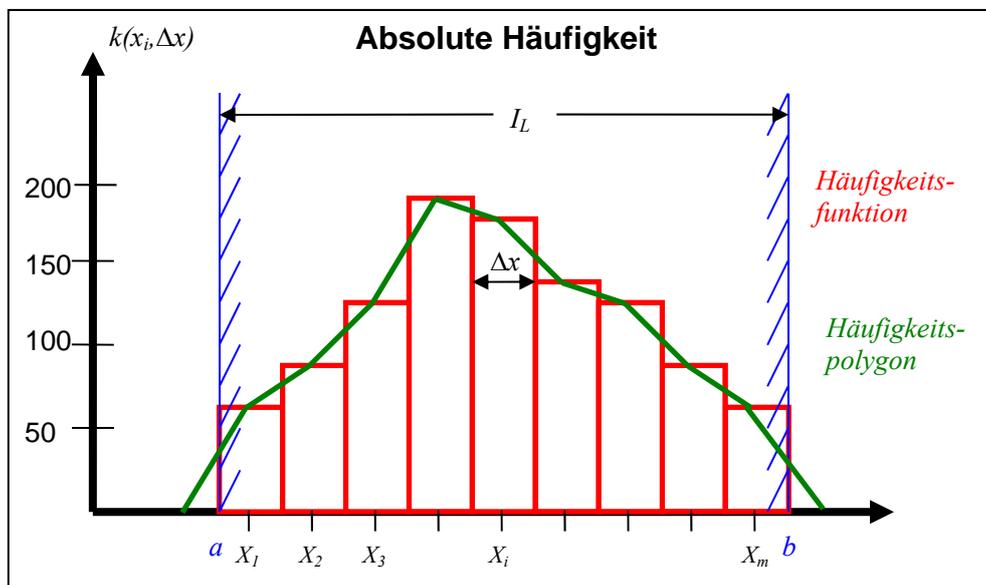
$$\Delta x = \frac{b - a}{m}.$$

Absolute Häufigkeit k_i : Anzahl k_i der Messwerte in der Klasse K_i

Für die k_i gilt:

$$0 \leq k_i \leq n, \text{ denn } \sum_{i=1}^m k_i = n$$

Die Darstellung erfolgt entweder als **Histogramm** (Treppenkurve) mit m Säulen der Höhe k_i oder als **Häufigkeitspolygon**, bei dem die einzelnen k_i durch Linien verbunden werden.



Relative Häufigkeit h_i : Verhältnis der k_i zum Umfang n der Messreihe.

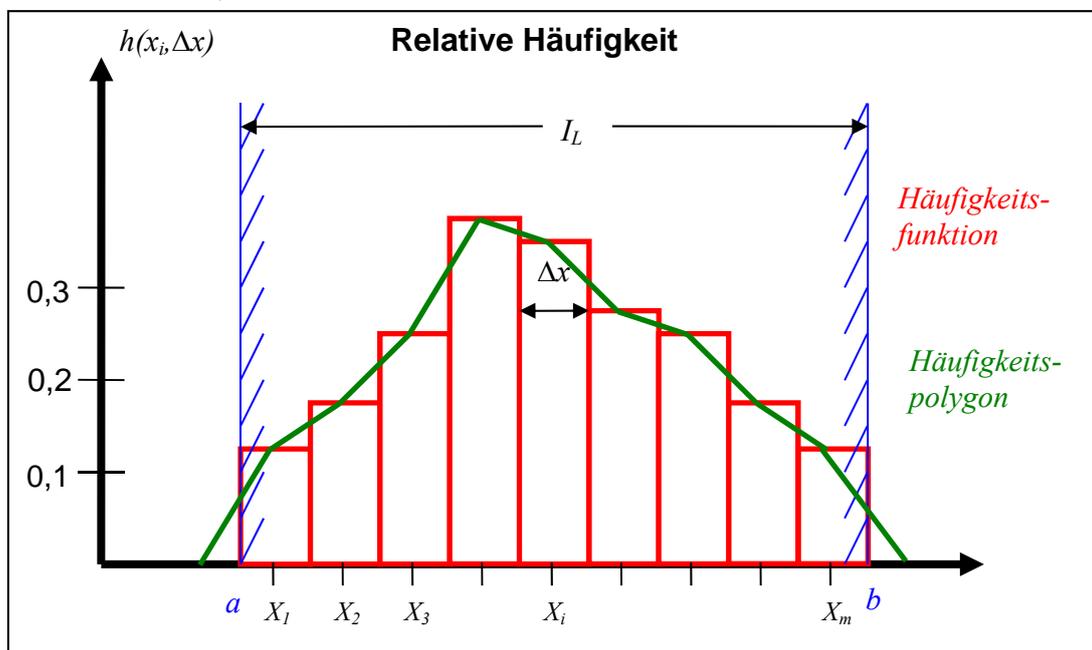
$$h_i = h(x_i, \Delta x) = \frac{k_i}{n} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Für die h_i gilt:

$$0 \leq h(x_i, \Delta x) \leq 1, \text{ denn } \sum_{i=1}^m h(x_i, \Delta x) = \sum_{i=1}^m \frac{k_i}{n} = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^m k_i}_{=n} = 1$$

Alle Klassen zusammen betrachtet bilden die **Häufigkeitsfunktion**.

Die Darstellung erfolgt als **Histogramm** mit m Säulen der Höhe h_i oder als **Häufigkeitspolygon**, bei dem die einzelnen h_i durch Linien verbunden werden.



Nachteile der Häufigkeitsfunktion:

- bei kleinen n (geringe Anzahl von Messwerten) wenig repräsentativ
- Funktion ist nicht stetig

Abhilfe für a): Übergang auf die Grundgesamtheit ($n \rightarrow \infty$)

Eine Messreihe vom Umfang $n = \infty$ wird als Grundgesamtheit bezeichnet. Für sie konvergiert die relative Häufigkeit zu ihrem Grenzwert, der **Wahrscheinlichkeit**. $p(x_i, \Delta x)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (h(x_i, \Delta x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{k_i}{n} \right) = p(x_i, \Delta x)$$

(für $n \rightarrow \infty$ ist die Funktion repräsentativ)

Wahrscheinlichkeitsfunktion

Abhilfe für b): Übergang auf die Wahrscheinlichkeitsdichte

Die Form der Wahrscheinlichkeitsfunktion hängt nicht nur ab von der Lage des Balkens (Klasse) auf der Zahlengeraden, was durch x_i gekennzeichnet wird, sondern auch von der Breite Δx der Klasse. Es wäre eine unabhängige Darstellung wünschenswert.

Diesen Mangel kann man beseitigen, indem man die Wahrscheinlichkeitsfunktion durch die Klassenbreite Δx dividiert und Klassenbreite differentiell schmal werden lässt ($\Delta x \rightarrow dx$).

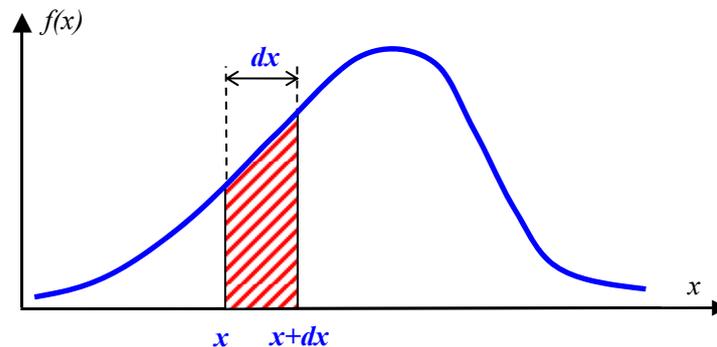
=> es folgt als Grenzfall die **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion**.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow dx} \left(\frac{p(x_i, \Delta x)}{\Delta x} \right) = f(x) \quad \text{Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion}$$

(Damit werden die Unstetigkeiten beseitigt)

Stetige Funktion $f(x)$ des Parameters x , die Auskunft über die Wahrscheinlichkeit P gibt, mit der eine Messgröße L zwischen den Grenzen x und $x+dx$ fällt.

$$p(x_i, dx) = P(x \leq L < x + dx) = f(x)dx$$



Wahrscheinlichkeitsdichte einer Zufallsgröße (schraffierte Fläche)

$$\sum p(x_i, dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

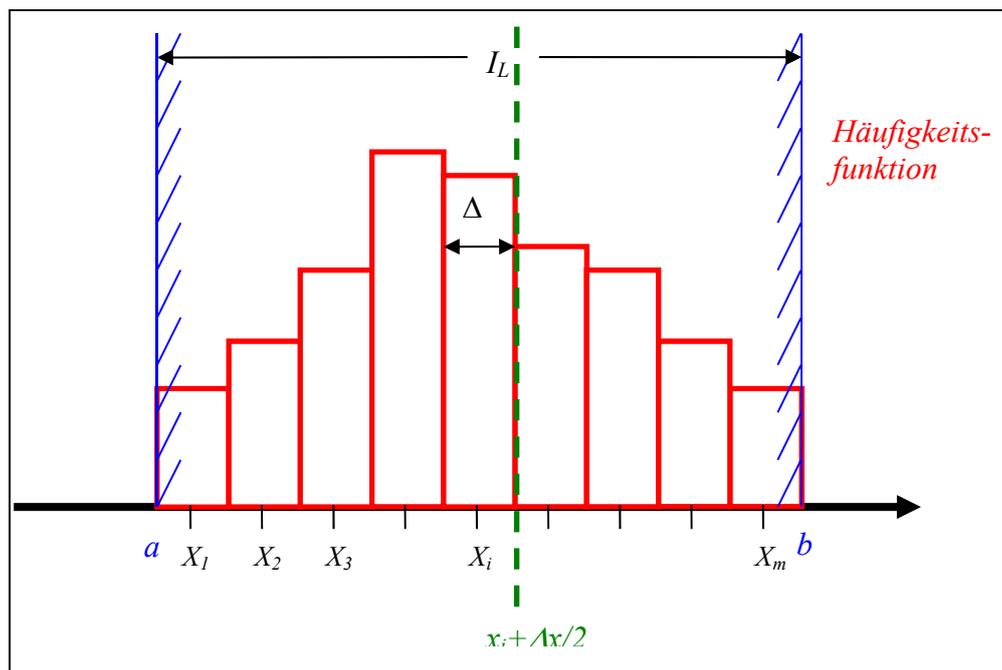
(Notwendige Bedingung für eine Wahrscheinlichkeitsdichte)

4.3.2 Summenhäufigkeitsfunktion und Verteilungsfunktion

Die Häufigkeitsfunktion aus 4.3.1 gibt die relative Häufigkeit von Beobachtungswerten in bestimmten Teilintervallen des Wertebereichs an. Sämtliche Messwerte fallen in das Intervall $[a, b]$, das in m Klassen der Breite Δx unterteilt ist (*oft weniger interessant*).

Das Verhältnis der k_i zum Umfang der Messreihe n wurde als Häufigkeitsfunktion h_i eingeführt in der Form $h_i = h(x_i, \Delta x) = k_i/n$ mit $i = 1, 2, \dots, m$, wobei m die Anzahl der Klassen war.

Die hier zu definierende Summenhäufigkeitsfunktion gibt die relative Häufigkeit von Beobachtungswerten an, die nicht größer als ein bestimmter Grenzwert $x_i + \frac{\Delta x}{2}$ sind (*oft sehr interessant*):



Übergang von der Histogramm-Darstellung in der Form

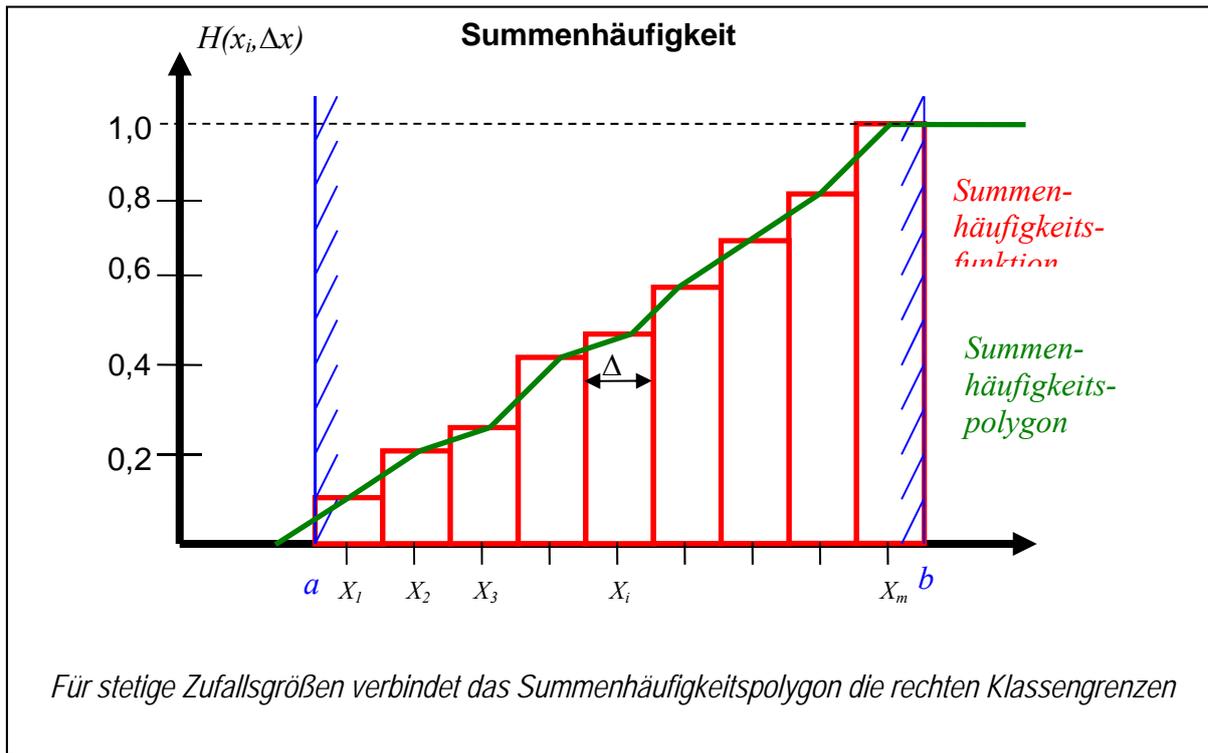
$$h(x_i, \Delta x) = \frac{k_i}{n} = \frac{\left(\begin{array}{l} \text{Anzahl der Werte} \\ \text{in der } i\text{-ten Klasse} \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{l} \text{Umfang der Stichprobe} \end{array} \right)} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

zur Darstellung als **Summenhäufigkeitsfunktion**

$$H(x_i, \Delta x) = \sum_{k=1}^i h(x_k, \Delta x)$$

Für die **Summenhäufigkeitsfunktion** gelten die Grenzen $0 \leq H(x_i, \Delta x) \leq 1$.

Die graphische Darstellung der **Summenhäufigkeitsfunktion** erfolgt in der Regel als **Summenhäufigkeitspolygon**.



Verteilungsfunktion: ähnlich wie in 4.3.1 kann auf die Grundgesamtheit und somit eine stetige Darstellung übergegangen werden:

$$(n \rightarrow \infty, \Delta x \rightarrow dx).$$

anstatt der Summenhäufigkeit erhält man die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Messgröße unterhalb eines Grenzwertes b liegt.

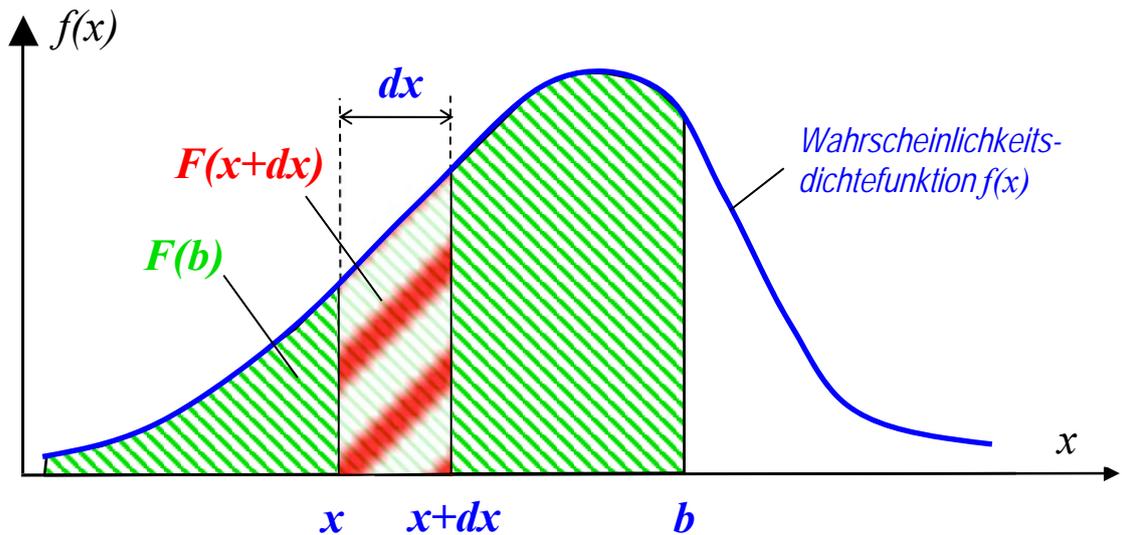
Verteilungsfunktion:

$$F(b) = P(L \leq b) = P(-\infty \leq L \leq b) = \int_{-\infty}^b f(x) dx$$

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

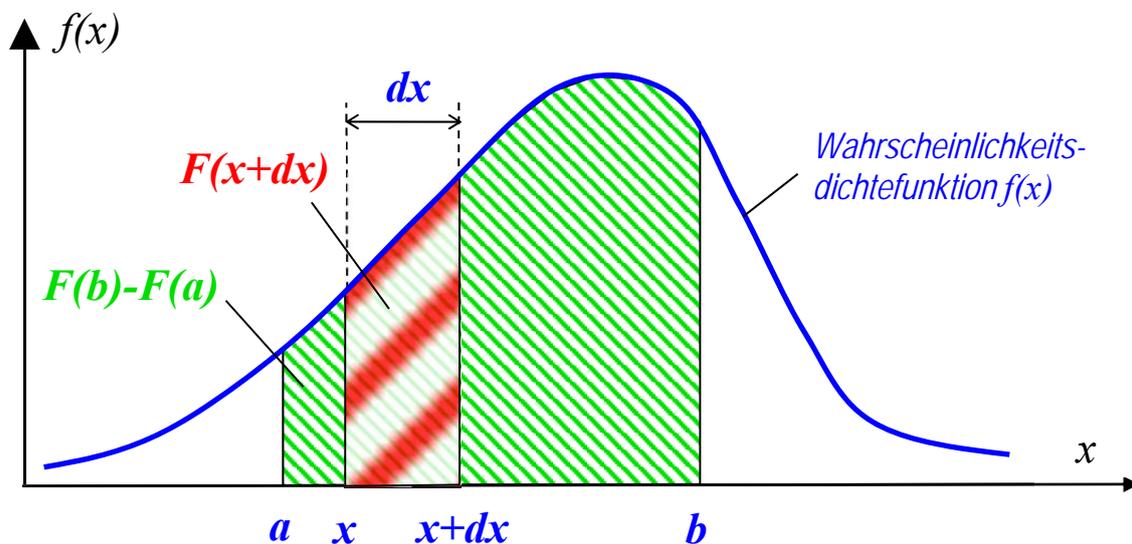
(Notwendige Bedingung für eine Wahrscheinlichkeitsdichte)



Graphische Darstellung der Verteilungsfunktion $F(b)$ und der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x)$

Wenn die Verteilungsfunktion einer Messgröße L (Zufallsgröße) bekannt ist, kann die Wahrscheinlichkeit angegeben werden, mit der L zwischen zwei Grenzen a und b fällt.

$$P(a \leq L \leq b) = P(L \leq b) - P(L \leq a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$



Graphische Darstellung der Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsgröße in ein Intervall $[a, b]$ fällt, als Fläche (Verteilungsfunktion $F(b) - F(a)$) unter der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x)$

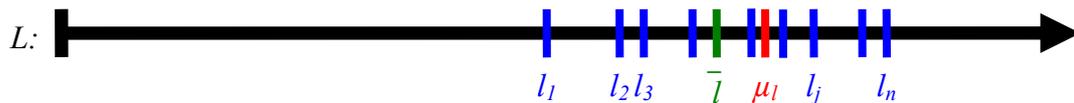
4.4 Mittelwert, Erwartungswert und Wahrer Wert einer Zufallsgröße

4.4.1 Definitionen

Gegeben:

Zufallsgröße L mit den Realisierungen $l_j, j=1,2,3,\dots,n$

(Stichprobe => Beobachtungsvektor)



$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} \quad n \text{ Beobachtungen für dieselbe Beobachtungsgröße}$$

Gesucht:

- Komprimierung der Information
- „Beste Realisierung“ nahe der Wahrheit

„Empirischer Mittelwert“ (oder auch „arithmetisches Mittel“)

$$\bar{l} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n l_j = \frac{1}{n} \cdot \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{l}$$

$$\text{mit } \mathbf{e}^T = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]$$

als erwartungstreue, unverzerrte Schätzung des Erwartungswertes.

Für $n = \infty$ konvergiert der Mittelwert gegen den **Erwartungswert**

$$\mu_l = E(L) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{l}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n l_j \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{l} \right)$$

Definition: $\mu_l = \int_{-\infty}^{\infty} l \cdot f(l) dl$ mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(l)$

Allgemein:

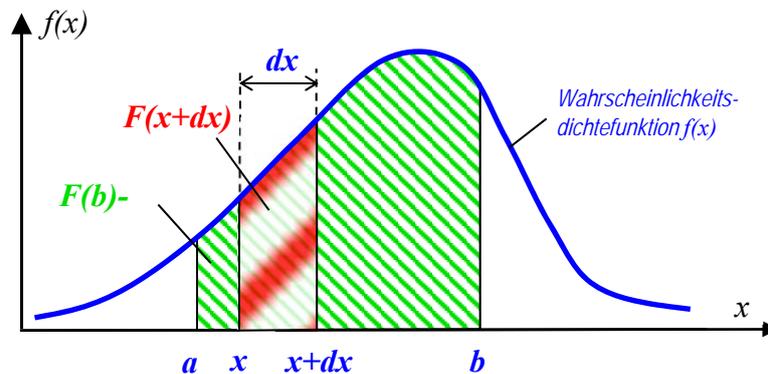
$$E(X) = \mu_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right) \quad \text{Erwartungswertoperator}$$

Strenge Definition für beliebiges $\delta > 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|l - \mu_l| > \delta) = 0$

Erwartungswert bei gegebener Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$

Nach 4.3.2 ist die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Zufallsgröße X in ein differentielles Intervall fällt:

$$P(x \leq X \leq x + dx) = f(x)dx = p_x$$



Von n Beobachtungen insgesamt (bei $n \rightarrow \infty$) fallen in dieses Intervall n_x Werte:

$$n_x = n \cdot p_x = n \cdot f(x)dx$$

Das Mittel all dieser Werte (analog zur Summenhäufigkeit) ist

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x \cdot n_x = \frac{1}{n} \cdot \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x \cdot n \cdot f(x)dx = \mu_x$$

Ersetze das Summenzeichen durch ein Integral:

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx \quad \text{Erwartungswert}$$

Erwartungswert μ_x bei bekannter Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$

Wahrer Wert

Der wahre Wert \tilde{L} ist i.d.R. nicht gleich dem Erwartungswert μ_L : $\tilde{L} \neq \mu_L$

Der wahre Wert ist in der Regel nicht bekannt! (Beispiel aus der Mathematik für einen bekannten wahren Wert: Winkelsumme im Dreieck = 180° !)

Wahrer Wert: $\tilde{L} = \mu_l - \Delta$ mit Δ als systematische Abweichung

Wahre Abweichung: $\eta_j = \varepsilon_j + \Delta_j = l_j - \tilde{L}$

Zufällige Abweichung (wird stets bezogen auf den Erwartungswert!)

$\varepsilon_j = l_j - \mu_l$ bzw. in Vektorform $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{1} - \mathbf{e} \cdot \mu_l$ mit dem Einsvektor $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Verbesserung (wird stets bezogen auf den Mittelwert)

$v_j = \bar{l} - l_j$ bzw. in Vektorform $\mathbf{v} = \mathbf{e} \cdot \bar{l} - \mathbf{l}$ mit dem Einsvektor $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

In technischen Bereichen wie z.B. dem Vermessungswesen wird durch spezielle Auswertemethoden^o und Messanordnungen^o darauf hingearbeitet, dass systematische Abweichungen möglichst gar nicht erst nicht auftreten oder verschwindend gering sind.

Dann (und nur dann) gilt: $\Delta = 0$, da $\mu_l = \tilde{L}$, es gilt dann auch: $\eta = \varepsilon$.

- ❶ Durch Kalibrierung im Labor kann beispielsweise die Abweichung eines Messbandes von der Soll-Länge bestimmt werden, die an jeder Messung anzubringen ist, um die Systematik zu eliminieren.
Durch Justierung können Messgeräte so eingestellt werden, dass die Systematik eliminiert wird.
(Merke: Eichen ist ein behördlicher Vorgang, den generell nur das Eichamt vornehmen darf)
- ❷ Durch Messanordnung in zwei Lagen wird erreicht, dass ein und dieselbe systematische Abweichung zweimal – jedoch mit unterschiedlichem Vorzeichen – anfällt. Mittelt man beide Werte, so wird die Abweichung eliminiert, ohne dass man ihre Größe bestimmt hat.

4.4.2 Rechenregeln für Erwartungswerte

Gegeben: Eine oder mehrere Zufallsgröße X bzw. ein Zufallsgrößenvektor \mathbf{X} mit Wahrscheinlichkeitsdichte(n) $f(x)$ und Erwartungswert(en) μ_x .

Eine Zufallsvariable Y ergibt sich durch Einsetzen von X bzw. \mathbf{X} in eine bekannte Funktion g :

$$Y = g(\mathbf{X})$$

1) Wahrscheinlichkeitsdichte $f(y)$ von Y :

$$f(y) = f(x) \frac{dx}{dy} = f(x) \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{f(x)}{g'(x)}$$

2.) Erwartungswert μ_y von Y (allgemeingültige Formel):

$$\mu_y = E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) dx$$

3.) Erwartungswert einer linearen Funktion $Y = g(X) = a + bX$ mit a und b als beliebige Konstanten:

$$\mu_y = E(Y) = a + b\mu_x = a + b \cdot E(X)$$

4.) Erwartungswert einer Summe $Y = g(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^m X_i = X_1 + X_2 + \dots + X_m$ von Zufallsgrößen X_i :

$$\mu_y = E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^m X_i\right) = \sum_{i=1}^m E(X_i)$$

Es gilt der Additionssatz für Erwartungswerte

5.) Erwartungswert eines Produktes $Y = g(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^m X_i = X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_m$ mehrerer Zufallsgrößen X_i :

$$\mu_y = E(Y) = E\left(\prod_{i=1}^m X_i\right) = \prod_{i=1}^m E(X_i)$$

*Es gilt der Multiplikationssatz für Erwartungswerte
(gilt nur für stochastisch unabhängige Zufallsgrößen):*

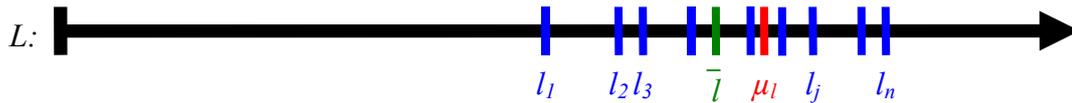
4.5 Varianz und Standardabweichung

4.5.1 Definition der Streuungsmaße

Gegeben:

Zufallsgröße L mit den Realisierungen $l_j, j=1,2,3,\dots,n$

(Stichprobe => Beobachtungsvektor)



$\mathbf{L}_{1,n}^T = (l_1 \ l_2 \ \dots \ l_n)$ n Beobachtungen für dieselbe Beobachtungsgröße
 alle Beobachtungswerte entstammen derselben Grundgesamtheit ($n \rightarrow \infty$)

=> Erwartungswert $E(L) = \mu_l$

Gesucht: Streuungsmaß

$$\varepsilon_j = l_j - \mu_l \quad \forall j$$

zufällige Abweichung

(„zufälliger Fehler“)

„ist – soll“

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n,1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 - \mu_l \\ l_2 - \mu_l \\ \vdots \\ l_n - \mu_l \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{n,1} - \mathbf{e}_{n,1} \cdot \mu_l$$

Abweichungsvektor

Die ε_j tragen die Informationen über die Streuung der Einzelwerte

Varianz bei gegebener Wahrscheinlichkeitsdichte (theoretische Varianz)

Definition der Varianz als Streuungsmaß einer Zufallsgröße (Genauigkeitsmaß):

$$\sigma_l^2 = E(\varepsilon^2) = E((L - \mu_l)^2) = E(L^2) - \mu_l^2$$

$$\sigma_l^2 = E(\varepsilon^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n \varepsilon_j^2 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{1,n}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{n,1} \right)$$

theoretische Varianz

Die Varianz σ^2 ist der Mittelwert der quadrierten ε_j

$$\sigma_l = +\sqrt{\sigma_l^2}$$

theoretische Standardabweichung

Ist die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x)$ bekannt, lässt sich die Varianz einer Zufallsgröße direkt (ohne Beobachtungen) berechnen:

$$\sigma_x^2 = E(\varepsilon^2) = E((x - \mu_x)^2)$$

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 f(x) dx$$

mit $f(x)$ = Dichte von x

theoretische Varianz

4.5.2 Empirische Werte für die Streuungsmaße

Liegen Beobachtungen vor („empirisch“), so lässt sich die empirische Standardabweichung s als Schätzwert für die theoretische Standardabweichung σ berechnen.

Achtung: Fallunterscheidung, ob Erwartungswert μ_L bekannt oder nicht

4.5.2.1 Der Erwartungswert μ_L der Zufallsgröße ist bekannt

(Fall A)

- Gegeben:
- Zufallsgröße L mit den Realisierungen $l_j, j=1,2,3,\dots,n$
 - Beobachtungsvektor $\mathbf{L}_{1,n}^T = (l_1 \ l_2 \ \dots \ l_n)$ bei $n \ll \infty$
 - bekannter Erwartungswert $E(L) = \mu_l$

⇒ Vektor der zufälligen Abweichungen $\mathbf{\varepsilon}_{n,1} = \mathbf{L}_{n,1} - \mathbf{e}_{n,1} \cdot \mu_l$

Gesucht: Schätzwert s_l^2 für die theoretische Varianz σ_l^2

$$s_l^2 = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n \varepsilon_j^2 = \frac{1}{n} \cdot \mathbf{\varepsilon}_{1,n}^T \mathbf{\varepsilon}_{n,1}$$

empirische Varianz eines Einzelwertes

$$s_l = \pm \sqrt{s_l^2}$$

empirische Standardabweichung

eines Einzelwertes

alt: $s_l = \pm \sqrt{s_l^2}$ ("mittlerer Fehler")

Es gilt : $E(s_l^2) = \sigma_l^2$ Die empirische Varianz s_l^2 ist eine erwartungstreue Schätzung für die theoretische Varianz σ_l^2

aber: $E(s_l) \neq \sigma_l$ Die empirische Standardabweichung s_l ist keine erwartungstreue Schätzung für die theoretische Standardabweichung σ_l ! In der Regel wird $E(s_l) < \sigma_l$

4.5.2.2 Der Erwartungswert μ_L der Zufallsgröße ist nicht bekannt (Fall B)

Gegeben: - Zufallsgröße L mit den Realisierungen $l_j, j=1,2,3,\dots,n$
 - Beobachtungsvektor $\mathbf{L}_{1,n}^T = (l_1 \ l_2 \ \dots \ l_n)$ bei $n < \infty$

nicht bekannt: - Erwartungswert $E(L) = \mu_l$

Gesucht: Schätzwert s_l^2 für die theoretische Varianz σ_l^2

Lösung: Ersetze den Erwartungswert μ_l durch den Mittelwert \bar{l}

$$\bar{l} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n l_j = \frac{1}{n} \cdot \mathbf{e}_{1,n}^T \cdot \mathbf{L}_{1,n}$$

empirischer Mittelwert

mit $\mathbf{e}_{1,n}^T = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$

$$v_j = \bar{l} - l_j \quad \forall j$$

Verbesserungen

Probe: $\sum_{j=1}^n v_j \stackrel{!}{=} 0$

$$\mathbf{v}_{n,1} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{l} - l_1 \\ \bar{l} - l_2 \\ \vdots \\ \bar{l} - l_n \end{bmatrix} = \mathbf{e}_{n,1} \cdot \bar{l} - \mathbf{L}_{n,1}$$

Verbesserungsvektor

$$s_l^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}{(n-1)} = \frac{1}{(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n v_i^2 = \frac{1}{(n-1)} \cdot \mathbf{v}_{1,n}^T \mathbf{v}_{n,1}$$

empirische Varianz

eines Einzelwertes

$$s_l = \pm \sqrt{s_l^2}$$

empirische Standardabweichung

eines Einzelwertes

alt: $s_l = \pm \sqrt{s_l^2}$ ("mittlerer Fehler")

Es gilt : $E(s_l^2) = \sigma_l^2$ Die empirische Varianz s_l^2 ist eine erwartungstreue Schätzung für die theoretische Varianz σ_l^2

aber: $E(s_l) \neq \sigma_l$ Die empirische Standardabweichung s_l ist keine erwartungstreue Schätzung für die theoretische Standardabweichung σ_l ! In der Regel wird $E(s_l) < \sigma_l$

Eine „Information“ und somit ein Freiheitsgrad f (Anzahl der überschüssigen Messungen) geht bei der Schätzung des Mittelwerts \bar{l} verloren, so dass durch $f = n-1$ geteilt wird.

4.5.2.3 Die Standardabweichung des Mittelwertes**(Fall A&B)**

Gegeben:

- Standardabweichung für einen Einzelwert s_l (entweder aus zufälligen Abweichungen (Fall A aus 2.4.2.1) oder aus Verbesserungen (Fall B aus 2.4.2.2))
- Mittelwert \bar{l} aus n Beobachtungen

Definitionen: Die Varianz eines aus n Beobachtungen ermittelten Mittelwertes \bar{l} :

$$s_{\bar{l}}^2 = \frac{s_l^2}{n}$$

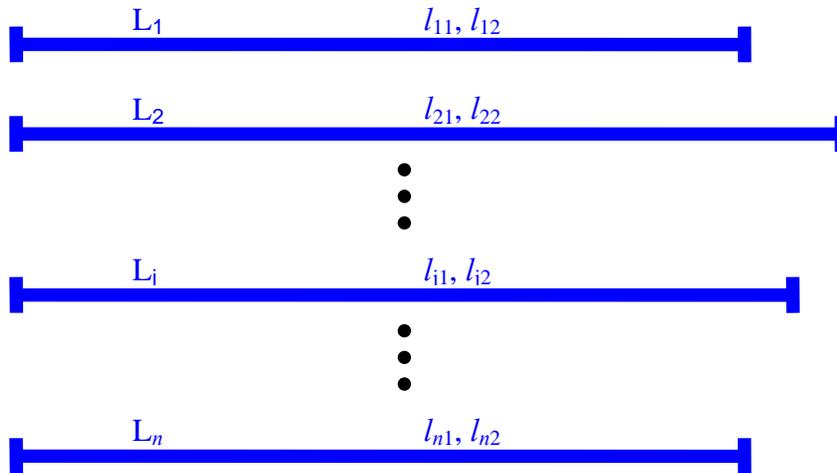
Die Standardabweichung eines aus n Beobachtungen ermittelten Mittelwertes \bar{l} :

$$s_{\bar{l}} = \frac{s_l}{\sqrt{n}}$$

Die Standardabweichung des Einzelwertes s_l kann entweder mittels zufälliger Abweichungen oder mittels Verbesserungen berechnet worden sein.

4.5.2.4 Standardabweichungen für Doppelbeobachtungen gleicher Genauigkeit

Gegeben: Mehrere gleichartige Größen seien je 2x beobachtet worden



$\mathbf{L}^T = [L_1 \quad L_2 \quad \dots \quad L_n]$	Zufallsvektor
$\mathbf{L}_{1,n}^T = [l_{11} \quad l_{21} \quad \dots \quad l_{n1}]$	erste Beobachtungsreihe
$\mathbf{L}_{2,n}^T = [l_{12} \quad l_{22} \quad \dots \quad l_{n2}]$	zweite Beobachtungsreihe

Gesucht: Schätzwert s_l^2 für die theoretische Varianz σ_l^2

Lösung: Bilden von Differenzen aus Doppelmessungen

Beispiel: Die Differenz aus dem Höhenunterschied des Hinwegs und dem Höhenunterschied des Rückwegs ($d = \Delta h_{hin} - \Delta h_{rück}$) beim Nivellement.

Beobachtungsdifferenzen d_j für jede doppelt beobachtete Größe:

$$d_j = l_j - l'_j \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, n$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{2,n} - \mathbf{L}_{1,n} = \begin{bmatrix} l_{12} - l_{11} \\ l_{22} - l_{21} \\ \vdots \\ l_{n2} - l_{n1} \end{bmatrix}$$

Die Standardabweichung s_l einer einzelnen Beobachtung l_j oder l_j' :

$$s_l = \sqrt{\frac{1}{2n} \cdot \mathbf{d}^T \cdot \mathbf{d}} = \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2}{2n}} = \sqrt{\frac{\sum d^2}{2n}}$$

empirische Standardabweichung

eines Einzelwertes

Die Standardabweichung $s_{\bar{l}}$ des aus beiden Beobachtungen gemittelten Wertes:

$$s_{\bar{l}} = \frac{s_l}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$$

empirische Standardabweichung

eines Mittelwertes

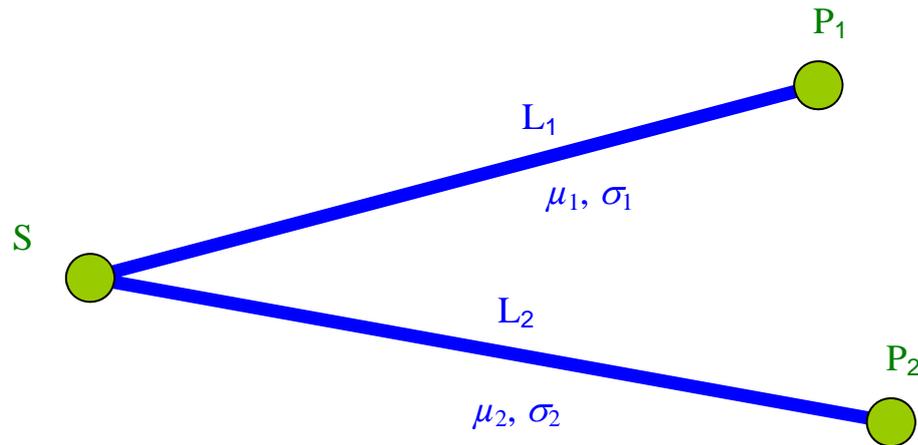
5 Der Zufallsvektor

5.1 Der zweidimensionale Zufallsvektor

5.1.1 Theoretische Varianz und theoretischer Korrelationskoeffizient

Gegeben: 2D – Zufallsvektor $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$ mit den Zufallsgrößen L_1 und L_2

Beispiel: nahezu zeitgleiche – also immer paarweise – Messung zweier Strecken von demselben Standpunkt aus



Nun stellt sich die Frage, ob es durch die ähnlichen Messumstände der nahezu zeitgleichen Datenerhebung eventuell Abhängigkeiten/Zusammenhänge zwischen den paarweise gewonnenen Messwerten gibt und wie man diese mathematisch beschreiben könnte.

Anstatt nun jeden Beobachtungswert für sich separat zu betrachten, werden die aus 4.5.1 bekannten Auswertungen nun in vektorieller Form für beide Messwerte „gleichzeitig“ in einem Guss durchgeführt.

Vektor der Erwartungswerte:
$$\boldsymbol{\mu}_{2,1} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = E\left(\mathbf{L}_{2,1}\right) = \begin{bmatrix} E(L_1) \\ E(L_2) \end{bmatrix}$$

Vektor der zufälligen Abweichungen:
$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{2,1} - \boldsymbol{\mu}_{2,1} = \begin{bmatrix} L_1 - \mu_1 \\ L_2 - \mu_2 \end{bmatrix}$$

analog zu 4.5.1:
$$E\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{L}}\right) = E\left(\mathbf{L}_{2,1} - \mathbf{e}_{2,1} \cdot \boldsymbol{\mu}_l\right) = \underbrace{E\left(\mathbf{L}_{2,1}\right)}_{\boldsymbol{\mu}_l} - \boldsymbol{\mu}_l = \mathbf{0}$$

$$E\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{L}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{L}}^T\right) = E\left(\begin{bmatrix} \varepsilon_1^2 & \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_1 & \varepsilon_2^2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1^2) & E(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2) \\ E(\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_1) & E(\varepsilon_2^2) \end{bmatrix}$$

Als Ergebnis der „gleichzeitigen“ Auswertung analog zu den aus 4.5.1 bekannten separaten Rechenoperationen erhalten wir nun eine Matrix.

Die beiden Komponenten auf der Hauptdiagonalen der Matrix sind bereits bekannt als theoretische Varianzen:

$$E(\varepsilon_i^2) = \sigma_i^2 \quad \text{für } i = 1, 2$$

theoretische Varianz von L

Die beiden anderen Komponenten abseits der Hauptdiagonalen der Matrix sind bisher nicht bekannt. Diese werden als theoretische Kovarianzen definiert:

Definition:

$$E(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n \varepsilon_{1j} \cdot \varepsilon_{2j} \right) = \sigma_{12}$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}$$

theoretische Kovarianzen
zwischen L_1 und L_2

Diese spezielle Matrix zum Vektor \mathbf{L} (verdeutlicht durch den Index „LL“) ist quadratisch und symmetrisch und enthält für die Zufallsgrößen L_1 und L_2 im Vektor \mathbf{L} zum einen als Streuungsmaße die Varianzen σ_1^2 und σ_2^2 (Genauigkeiten, quadrierte Standardabweichungen) und zum anderen als Maß der Abhängigkeit die Kovarianzen σ_{12} bzw. σ_{21} .

Diese Matrix wird als „Varianz-/Kovarianzmatrix folgendermaßen definiert:

Definition:

$$\Sigma_{\mathbf{LL}} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = E \left(\begin{matrix} \varepsilon_{\mathbf{L}} \\ \varepsilon_{\mathbf{L}}^T \end{matrix} \right) = E \left(\begin{matrix} \varepsilon_{2,1} & \varepsilon_{1,2} \end{matrix} \right)$$

theoretische Varianz-/Kovarianzmatrix von L

- Varianzen können nur „+“ sein
- Kovarianzen sind „Maß für die Abhängigkeit“ von L_1 und L_2
- => für stochastisch unabhängige Größen ist $\sigma_{12}=0$

Mit Hilfe der numerisch identischen Kovarianzen σ_{12} bzw. σ_{21} lässt sich ein normiertes Maß für die Abhängigkeit zwischen den beiden Zufallsgrößen L_1 und L_2 finden:

Definition:

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2}$$

theoretischer Korrelationskoeffizient

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}$$

zwischen L_1 und L_2

- feste Grenzen $-1 \leq \rho_{12} \leq +1$
- stochastisch unabhängig (keine Korrelation) bei $\rho_{12} = 0$
- maximale gleichgerichtete Korrelation bei $\rho_{12} = +1$
- maximale entgegengesetzte Korrelation bei $\rho_{12} = -1$

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} \Rightarrow \sigma_{12} = \rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2$$

$$\Sigma_{\mathbf{L}\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \\ \rho_{12} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Gleichberechtigte Darstellungsform für $\Sigma_{\mathbf{L}\mathbf{L}}$

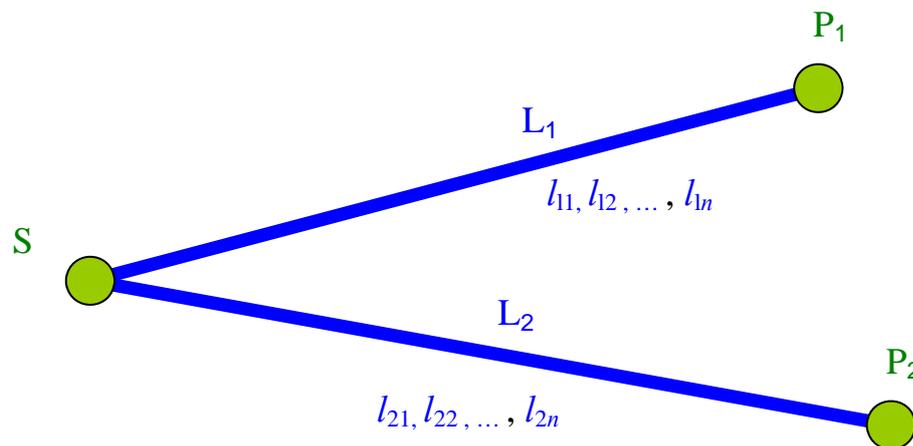
5.1.2 Empirische Varianz und empirischer Korrelationskoeffizient

Gegeben: 2D – Zufallsvektor $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$ mit den Zufallsgrößen L_1 und L_2 sowie de-

ren Realisierungen in der Beobachtungsmatrix: $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} \\ l_{12} & l_{22} \\ \vdots & \vdots \\ l_{1n} & l_{2n} \end{bmatrix}$
 jeweils n Messungen
 (Realisierungen)
 zu 2 Zufallsgrößen

Die korrespondierenden Beobachtungswerte l_{1j} und l_{2j} werden „paarweise“ gewonnen, das heißt nahezu zeitgleiche Beobachtung unter fast identischen Bedingungen.

Beispiel: gleichzeitige Messung zweier Strecken von demselben Standpunkt aus



Gesucht: Empirischer Schätzwert r_{12} für den theoretischen Korrelationskoeffizienten ρ_{12}

Lösung mittels Fallunterscheidung, ob Erwartungswert μ_L bekannt oder nicht (siehe 4.5.2)

5.1.2.1 Empirische Varianz/Kovarianz bei bekanntem Erwartungswert μ_L (Fall A)

Vektor der Erwartungswerte: $\boldsymbol{\mu}_{2,1} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = E(\mathbf{L}_{2,1}) = \begin{bmatrix} E(L_1) \\ E(L_2) \end{bmatrix}$

Matrix der zufälligen Abweichungen: $\boldsymbol{\varepsilon}_{n,2} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \\ \vdots & \vdots \\ \varepsilon_{1n} & \varepsilon_{2n} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{n,1} - \mathbf{e}_{n,1} \cdot \boldsymbol{\mu}_{1,2} = \begin{bmatrix} l_{11} - \mu_1 & l_{21} - \mu_2 \\ l_{12} - \mu_1 & l_{22} - \mu_2 \\ \vdots & \vdots \\ l_{1n} - \mu_1 & l_{2n} - \mu_2 \end{bmatrix}$

Definitionen:

$$\mathbf{S}_{2,2} = \frac{1}{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{n,2}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{n,2} = \frac{1}{n} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \varepsilon_{1j}^2 & \sum_{j=1}^n \varepsilon_{1j} \cdot \varepsilon_{2j} \\ \sum_{j=1}^n \varepsilon_{2j} \cdot \varepsilon_{1j} & \sum_{j=1}^n \varepsilon_{2j}^2 \end{bmatrix}$$

$$s_i^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij}^2 \quad \text{für } i = 1, 2$$

empirische Varianzen von L_1 bzw. L_2

$$s_{12} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n \varepsilon_{1j} \cdot \varepsilon_{2j}$$

empirische Kovarianzen zwischen L_1 und L_2

$$s_{12} = s_{21}$$

$$\mathbf{S}_{2,2} = \frac{1}{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{n,2}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{n,2} = \begin{bmatrix} s_1^2 & s_{12} \\ s_{21} & s_2^2 \end{bmatrix}$$

empirische Varianz-/Kovarianzmatrix von L

5.1.2.2 Empirische Varianz/Kovarianz bei unbekanntem Erwartungswert μ_L (Fall B)

Der Vektor der Erwartungswerte $\underline{\mu}$ ist nicht bekannt und zu ersetzen durch den

Vektor der Mittelwerte:
$$\bar{\mathbf{l}}_{2,1} = \begin{bmatrix} \bar{l}_1 \\ \bar{l}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \cdot \mathbf{l}_{2,n}^T \cdot \mathbf{e}_{n,1} = \frac{1}{n} \cdot \begin{bmatrix} l_{11} + l_{12} + \dots + l_{1n} \\ l_{21} + l_{22} + \dots + l_{2n} \end{bmatrix}$$

Verbesserungsmatrix:
$$\mathbf{v}_{n,2} = \mathbf{e}_{n,1} \cdot \bar{\mathbf{l}}_{2,1}^T - \mathbf{l}_{2,n} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \\ \vdots & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{l} - l_{11} & \bar{l} - l_{21} \\ \bar{l} - l_{12} & \bar{l} - l_{22} \\ \vdots & \vdots \\ \bar{l} - l_{1n} & \bar{l} - l_{2n} \end{bmatrix}$$

Definitionen:

$$s_i^2 = \frac{1}{(n-1)} \cdot \sum_{j=1}^n v_{ij}^2 \quad \text{für } i = 1, 2$$

empirische Varianzen von L_1 bzw. L_2

$$s_{12} = \frac{1}{(n-1)} \cdot \sum_{j=1}^n v_{1j} \cdot v_{2j}$$

empirische Kovarianzen zwischen L_1 und L_2

$$s_{12} = s_{21}$$

$$\mathbf{S}_{2,2}^{LL} = \frac{1}{(n-1)} \cdot \mathbf{v}_{2,n}^T \cdot \mathbf{v}_{n,2} = \begin{bmatrix} s_1^2 & s_{12} \\ s_{21} & s_2^2 \end{bmatrix}$$

empirische Varianz-/Kovarianzmatrix von L

5.1.2.3 Zusammenführen der Fälle A und B \Rightarrow Empirische KorrelationDefinition:

$$r_{12} = \frac{s_{12}}{s_1 \cdot s_2}$$

$$s_{12} = s_{21}$$

empirischer Korrelationskoeffizientzwischen L_1 und L_2

- feste Grenzen $-1 \leq r_{12} \leq +1$
- stochastisch unabhängig (keine Korrelation) bei $r_{12} = 0$
- maximale gleichgerichtete Korrelation bei $r_{12} = +1$ (positive Korrelation)
- maximale entgegengesetzte Korrelation bei $r_{12} = -1$ (negative Korrelation)

$$r_{12} = \frac{s_{12}}{s_1 \cdot s_2} \Rightarrow s_{12} = r_{12} \cdot s_1 \cdot s_2$$

$$\mathbf{S}_{LL} = \begin{bmatrix} s_1^2 & s_{12} \\ s_{21} & s_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1^2 & r_{12} \cdot s_1 \cdot s_2 \\ r_{12} \cdot s_2 \cdot s_1 & s_2^2 \end{bmatrix}$$

Gleichberechtigte Darstellungsform für \mathbf{S}_{LL}

5.1.3 Zusammenfassung

Theoretische Kovarianzmatrix (oder Varianz-Kovarianzmatrix)

$$\Sigma_{\text{II}} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Sind l_1, l_2 stochastisch unabhängig, gilt für die Kovarianz: $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0$

Empirische Kovarianzmatrix

$$S_{\text{II}} = \begin{bmatrix} s_1^2 & s_{12} \\ s_{12} & s_2^2 \end{bmatrix}$$

Berechnung der empirischen Kovarianzmatrix, bei bekannten Erwartungswerten μ

$$S_{\text{II}} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}}{n} = \frac{1}{n} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \varepsilon_{1j}^2 & \sum_{j=1}^n \varepsilon_{1j} \cdot \varepsilon_{2j} \\ \sum_{j=1}^n \varepsilon_{1j} \cdot \varepsilon_{2j} & \sum_{j=1}^n \varepsilon_{2j}^2 \end{pmatrix}$$

Berechnung der empirischen Kovarianzmatrix, bei unbekanntem Erwartungswerten μ

$$S_{\text{II}} = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}{n-1} = \frac{1}{n-1} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n v_{1j}^2 & \sum_{j=1}^n v_{1j} \cdot v_{2j} \\ \sum_{j=1}^n v_{1j} \cdot v_{2j} & \sum_{j=1}^n v_{2j}^2 \end{pmatrix}$$

Theoretischer Korrelationskoeffizient: $\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}$ allgemein: $-1 \leq \rho \leq +1$

Empirischer Korrelationskoeffizient $r_{12} = \frac{s_{12}}{s_1 s_2}$ allgemein: $-1 \leq r \leq +1$

Einteilung der Korrelationen nach ihrer Entstehung

I.) Mathematische Korrelation: (auch „funktionale Korrelation“ oder „algebraische Korrelation“)

Wenn zwischen zwei oder mehreren Realisierungen von Zufallsgrößen bei einer Auswertung ein funktionaler Zusammenhang formuliert wird, so entsteht zwischen den sich ergebenden Schätzwerten eine Korrelation. (\Leftarrow entsteht rein mathematisch bei der Auswertung)

II.) Physikalische Korrelation:

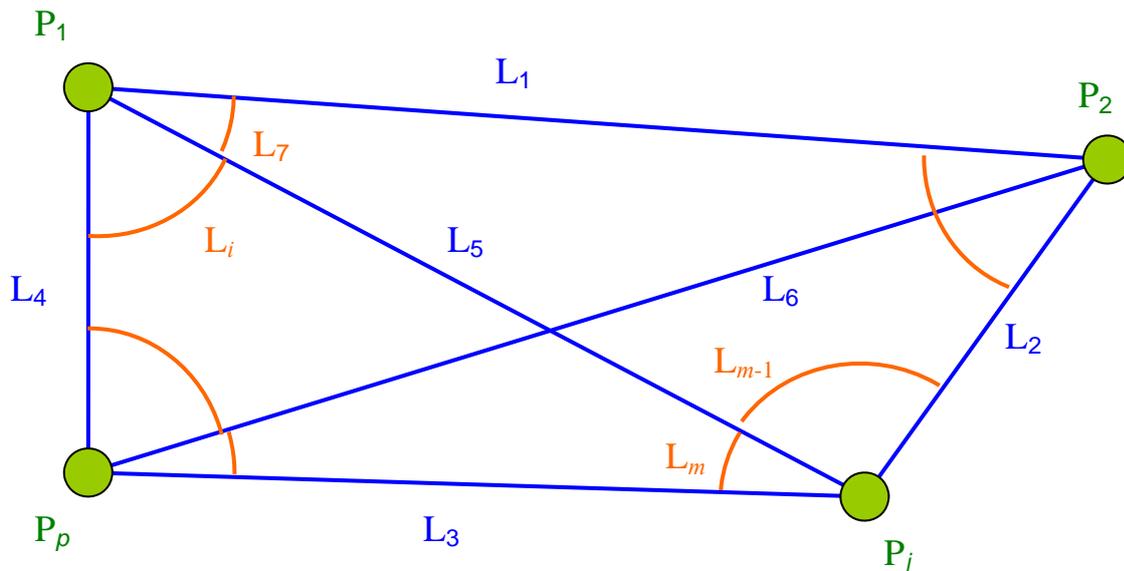
Korrelation zwischen je zwei Realisierungen von Zufallsgrößen (\Leftarrow entsteht bei der Messung) infolge systematischer Restabweichungen („Restfehler“), die im funktionalen Modell nicht oder – was wesentlich häufiger der Fall ist – nur unzureichend erfasst sind.

5.2 Der m-dimensionale Zufallsvektor

5.2.1 Theoretischer Erwartungswert und theoretische Kovarianzmatrix

Die in Abschnitt 5.1 für den 2-dimensionalen Fall definierte theoretische Varianz-/Kovarianzmatrix lässt sich statt für zwei Zufallsgrößen für beliebig viele Zufallsgrößen definieren.

Beispiel: Messung von Richtungen und Strecken in einem Netz



Gegeben: m Zufallsgrößen L_1, L_2, \dots, L_m

Zufallsvektor:

$$\mathbf{L}_{m,1} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix}$$

Vektor der Erwartungswerte:

$$\boldsymbol{\mu}_{m,1} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{bmatrix} = E(\mathbf{L}_{m,1}) = \begin{bmatrix} E(L_1) \\ E(L_2) \\ \vdots \\ E(L_m) \end{bmatrix}$$

Vektor der zufälligen Abweichungen:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{m,1} - \boldsymbol{\mu}_{m,1} = \begin{bmatrix} L_1 - \mu_1 \\ L_2 - \mu_2 \\ \vdots \\ L_m - \mu_m \end{bmatrix}$$

analog zu 4.5.1:
$$E\left(\boldsymbol{\varepsilon}_L\right) = E\left(\mathbf{L} - \boldsymbol{\mu}_L\right) = E\left(\mathbf{L}\right) - \boldsymbol{\mu}_L = \mathbf{0}$$

$$E\left(\boldsymbol{\varepsilon}_L \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_L^T\right) = \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1^2) & E(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2) & \cdots & E(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_m) \\ E(\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_1) & E(\varepsilon_2^2) & \cdots & E(\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(\varepsilon_m \cdot \varepsilon_1) & E(\varepsilon_m \cdot \varepsilon_2) & \cdots & E(\varepsilon_m \cdot \varepsilon_m) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Sigma}_{LL}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{LL} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \cdots & \sigma_m^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 & \cdots & \rho_{1m} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_m \\ \rho_{21} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2m} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{m1} \cdot \sigma_m \cdot \sigma_1 & \rho_{m2} \cdot \sigma_m \cdot \sigma_2 & \cdots & \sigma_m^2 \end{bmatrix}$$

theoretische Varianz- / Kovarianzmatrix von L

$$E(\varepsilon_i^2) = \sigma_i^2$$

theoretische Varianz von Li

5.2.2 Empirischer Erwartungswert und empirische Kovarianzmatrix

Gegeben: m Zufallsgrößen $L = [L_1 \quad L_2 \quad \dots \quad L_m]$

m -dimensionale Beobachtungsmatrix:

$$\mathbf{I}_{m,n} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{m1} \\ l_{12} & l_{22} & \cdots & l_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{1n} & l_{2n} & \cdots & l_{mn} \end{bmatrix}$$

(m unterschiedliche Beobachtungsgrößen sind jeweils n -mal beobachtet worden)

m -dimensionale Vektoren der Mittelwerte bzw. der Erwartungswerte

$$\bar{l} = [\bar{l}_1 \quad \bar{l}_2 \quad \dots \quad \bar{l}_m] \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\mu} = [\mu_1 \quad \mu_2 \quad \dots \quad \mu_m]$$

m -dimensionale Kovarianzmatrix

$$\boldsymbol{\Sigma}_{II} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \cdots & \sigma_m^2 \end{bmatrix}$$

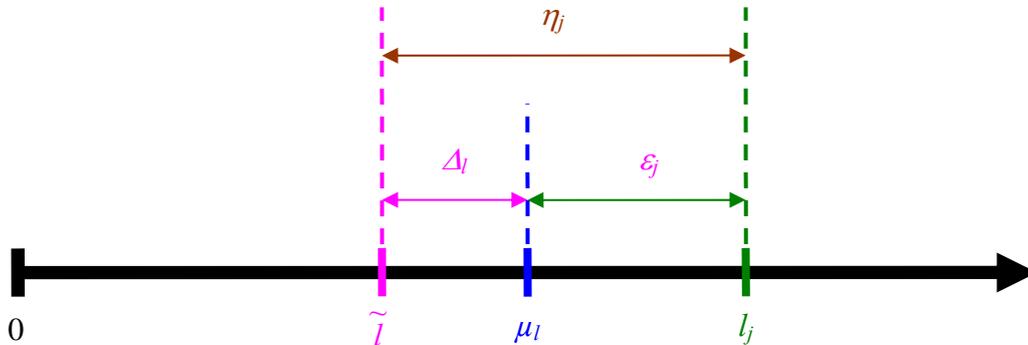
Korrelationskoeffizienten für den m -dimensionalen Fall

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \quad \text{bzw.} \quad r_{ij} = \frac{s_{ij}}{s_i s_j} \quad \text{für } i, j = 1, 2, \dots, m \quad \text{und } i \neq j.$$

⇒ alle Berechnungen (z.B. Verbesserungen, empirische Varianzen und Kovarianzen sowie Korrelationskoeffizienten) wie im 2-dimensionalen Fall

6 Fortpflanzung von Beobachtungsabweichungen („Fehlerfortpflanzung“)

6.1 Wahre, systematische und zufällige Abweichungen



Für eine einzelne Zufallsgröße L :

Beobachtungswert: l_j

Wahrer Wert der Zufallsgröße: \tilde{l}

Erwartungswert: $\mu_l = E(L) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{l}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n l_j \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{l} \right)$

Zufällige Abweichung:

$$\varepsilon_j = l_j - \mu_l \quad \forall j$$

„ist - soll“

(alt: „zufälliger Fehler“)

Systematische Abweichung:

$$\Delta_l = \mu_l - \tilde{l}$$

„Erwartungswert - Wahrer Wert“

Wahre Abweichung:

$$\eta_j = l_j - \tilde{l} = \Delta_l + \varepsilon_j \quad \forall j$$

$$l_j = \tilde{l} + \eta_j = \tilde{l} + \Delta_l + \varepsilon_j = \mu_l + \varepsilon_j \quad \forall j$$

Für Zufallsvektoren \mathbf{L} :

Zufallsvektor: $\mathbf{L}_{1,n}^T = [L_1 \quad L_2 \quad \dots \quad L_n]$

Beobachtungsvektor: $\mathbf{l}_{1,n}^T = [l_1 \quad l_2 \quad \dots \quad l_n]$

Vektor der wahren Werte: $\tilde{\mathbf{l}}_{1,n}^T = [\tilde{l}_1 \quad \tilde{l}_2 \quad \dots \quad \tilde{l}_n]$

Erwartungswertvektor: $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{L},1,n}^T = [\mu_1 \quad \mu_2 \quad \dots \quad \mu_n] = E\left(\mathbf{L}_{1,n}^T\right)$

Zufällige Abweichungen:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{L}} = \mathbf{l} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{L}}$$

„ist - soll“

Systematische Abweichung:

$$\boldsymbol{\Delta}_1 = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{L}} - \tilde{\mathbf{l}}$$

„Erwartungswert - Wahrer Wert“

Wahre Abweichung:

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \mathbf{l} - \tilde{\mathbf{l}} = \boldsymbol{\Delta}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_j$$

$$\mathbf{l} = \tilde{\mathbf{l}} + \boldsymbol{\eta}_1 = \tilde{\mathbf{l}} + \boldsymbol{\Delta}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_j = \boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_j$$

6.2 Fortpflanzung systematischer Abweichungen

Gegeben: $\mathbf{I} = \tilde{\mathbf{I}} + \Delta_{\mathbf{I}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{I}}$ Beobachtungsvektor
 $\begin{matrix} n,1 & n,1 & n,1 & n,1 \end{matrix}$

Gesucht: Größen $\mathbf{f}_{u,1}$, die sich nicht direkt messen lassen, aber sich aus $\mathbf{I}_{n,1}$ als $\mathbf{f}_{u,1} = \Phi(\mathbf{I}_{n,1})$ berechnen („ableiten“) lassen.

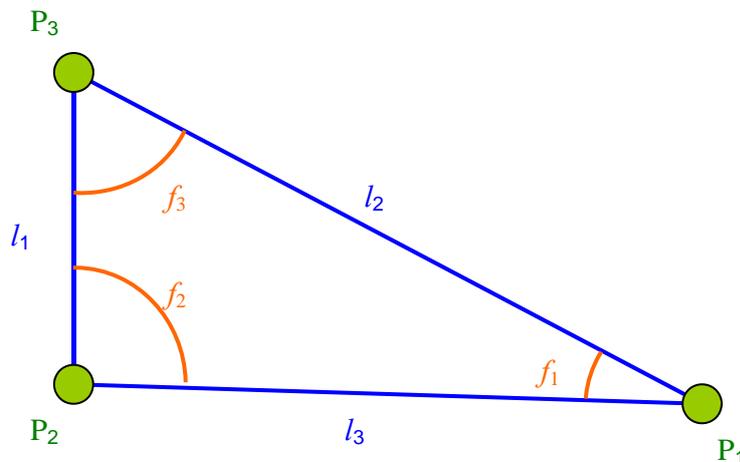
Frage: Wie wirken sich systematische Fehler Δ_{l_j} in $\mathbf{I}_{n,1}$ auf die abgeleiteten Größen $\mathbf{f}_{u,1}$ als $\Delta \mathbf{f}_{u,1}$ aus?

$$\mathbf{f}_{u,1} = \Phi(\mathbf{I}_{n,1}) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\mathbf{I}_{n,1}) \\ \varphi_2(\mathbf{I}_{n,1}) \\ \vdots \\ \varphi_u(\mathbf{I}_{n,1}) \end{bmatrix}$$

Problem: Die Funktionen der Beobachtungen $\mathbf{f}_{u,1} = \Phi(\mathbf{I}_{n,1})$ sind oft nicht linear.

Beispiel: *Dreieck mit drei gemessenen Seiten.*

Zu berechnen sind die nicht gemessenen Winkel $\mathbf{f}_{1,u}^T = [f_1 \ f_2 \ f_3]$ sowie deren systematische Abweichungen $\Delta \mathbf{f}_{1,u}^T = [\Delta f_1 \ \Delta f_2 \ \Delta f_3]$



b) Übergang zu systematischen Abweichungen

Wahre Abweichung von $\mathbf{l}_{n,1}$ $\boldsymbol{\eta}_l = \boldsymbol{\Delta}_l + \boldsymbol{\varepsilon}_l$

Wahre Abweichung von $\mathbf{f}_{u,1}$: $\boldsymbol{\eta}_f = \boldsymbol{\Delta}_f + \boldsymbol{\varepsilon}_f$

$$\boldsymbol{\eta}_f = \boldsymbol{\Delta}_f + \boldsymbol{\varepsilon}_f = \mathbf{F} \cdot (\boldsymbol{\Delta}_l + \boldsymbol{\varepsilon}_l) = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\Delta}_l + \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_l$$

Erwartungswerte: $E(\boldsymbol{\eta}_f) = \boldsymbol{\Delta}_f + \underbrace{E(\boldsymbol{\varepsilon}_f)}_{=0} = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\Delta}_l + \underbrace{\mathbf{F} \cdot E(\boldsymbol{\varepsilon}_l)}_{=0}$

⇒ $\boldsymbol{\Delta}_f = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\Delta}_l$ **Fortpflanzungsgesetz**
für systematische Abweichungen

Voraussetzung: Die systematischen Abweichungen müssen bekannt sein bzw. sich abschätzen lassen

6.3 Fortpflanzung zufälliger Abweichungen

$$\eta_{f,1} = \Delta_{f,1} + \epsilon_{f,1} = \mathbf{F} \cdot \underbrace{\Delta_{1,n}}_{\Delta_{f,u,1}} + \mathbf{F} \cdot \epsilon_{1,n}$$

$$\Rightarrow \boxed{\epsilon_{f,1} = \mathbf{F} \cdot \epsilon_{1,n}} \quad \text{Fortpflanzung zufälliger Abweichungen}$$

Problem: Die zufälligen Abweichungen $\epsilon_{1,n}$ von $\mathbf{1}_{n,1}$ sind i.d.R. unbekannt

Lösung: Übergang auf Varianzen und Kovarianzen und somit auf Kovarianzmatrizen

Gegeben: $\Sigma_{11} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$ von $\mathbf{1}_{n,1}$

Gesucht: $\Sigma_{ff} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1u} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{u1} & \sigma_{u2} & \dots & \sigma_u^2 \end{bmatrix}$ von $\mathbf{f}_{u,1}$

Definition: $\Sigma_{LL} = E(\epsilon_L \cdot \epsilon_L^T)$
 $\Sigma_{ff} = E(\epsilon_f \cdot \epsilon_f^T)$

$$\epsilon_{f,1} \cdot \epsilon_{f,1}^T = \mathbf{F} \cdot \epsilon_{1,n} \cdot \epsilon_{1,n}^T \cdot \mathbf{F}^T \Rightarrow E(\epsilon_{f,1} \cdot \epsilon_{f,1}^T) = \mathbf{F} \cdot E(\epsilon_{1,n} \cdot \epsilon_{1,n}^T) \cdot \mathbf{F}^T$$

$$\Rightarrow \boxed{\Sigma_{ff} = \mathbf{F} \cdot \Sigma_{LL} \cdot \mathbf{F}^T} \quad \text{„Fehlerfortpflanzungsgesetz“}$$

(besser) Kovarianzfortpflanzungsgesetz

6.4 Praktisches Vorgehen bei der Kovarianzfortpflanzung

6.4.1 Fortpflanzung systematischer und zufälliger Abweichungen

Nicht alle interessierenden Größen können direkt erfasst (gemessen) werden. Oftmals ist es notwendig, die wirklich relevanten Größen aus den beobachteten zu berechnen. Dann stellt sich die Frage, wie stark sich Abweichungen in den beobachteten Größen auf die aus ihnen berechneten Größen auswirken, d.h. mit welchem Fehler die abgeleiteten Größen behaftet sind.

Eindimensionaler linearer Fall : $x = \Phi(l) = F \cdot l$

Zufällige Abweichung ε : $\varepsilon_x = F \cdot \varepsilon_l$ mit $E(\varepsilon_l) = 0 \Rightarrow E(\varepsilon_x) = F \cdot E(\varepsilon_l) = 0$

Systematische Abweichung Δ : $\Delta_x = F \cdot \Delta_l$ mit $E(\Delta_l) = \Delta_l \Rightarrow E(\Delta_x) = F \cdot E(\Delta_l) = F \cdot \Delta_l$

Das Kovarianzfortpflanzungsgesetz gilt nur für zufällige Abweichungen!

6.4.2 Das Kovarianzfortpflanzungsgesetz für eine Zielgröße bei unkorrelierten Beobachtungen („Totales Differential“)

Schritt A: Aufstellen des funktionalen Modells für n Beobachtungen l_i

$$x = \Phi(\mathbf{l}) = f(l_1, l_2, \dots, l_n)$$

Die abgeleitete Größe (Zielgröße) wird als Funktion der Beobachtungen dargestellt. Varianzfreie Größen werden als Konstanten betrachtet. Nach diesen wird in Schritt B nicht differenziert.

Schritt B: Bilden des totalen Differentials

Linearisierung nach Taylor für die nichtlineare Funktion Φ , welche an der Entwicklungsstelle stetig und differenzierbar sein muss:

$$\begin{aligned} X &= X_0 + dx = f(l_1 + dl_1, l_2 + dl_2, \dots, l_n + dl_n) = \\ &= \underbrace{f(l_1, l_2, \dots, l_n)}_{=F \cdot l} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial l_1} dl_1 + \frac{\partial f}{\partial l_2} dl_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial l_n} dl_n}_{\text{Glieder 1. Ordnung}} + \\ &\quad + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial l_1^2} dl_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial l_2^2} dl_2^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial l_n^2} dl_n^2}_{\text{Glieder 2. Ordnung}} + \\ &\quad + \dots + \underbrace{\frac{\partial^k f}{\partial l_1^k} dl_1^k + \frac{\partial^k f}{\partial l_2^k} dl_2^k + \dots + \frac{\partial^k f}{\partial l_n^k} dl_n^k}_{\text{Glieder höherer Ordnung}} \quad \text{mit } k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$dl_i = \varepsilon_i \ll l_i \quad \forall i \Rightarrow \quad \text{Abbruch nach Gliedern 1. Ordnung}$$

Totales Differential der Funktion F : $dx = \varepsilon_x = \frac{\partial f}{\partial l_1} \varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial l_2} \varepsilon_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial l_n} \varepsilon_n$.

Partielle Ableitungen (Differentialkoeffizienten)

Schritt C: Übergang zur Varianz

Im Allgemeinen sind die einzelnen zufälligen Abweichungen ε_i unbekannt, aber die Standardabweichungen, die empirisch als s_{l_i} (z.B. aus Wiederholungsmessungen) oder theoretisch als σ_{l_i} vorliegen, sind bekannt.

Übergang von der zufälligen Abweichung zur Varianz $\sigma_x^2 = E(\varepsilon_x)^2$ mit $\sigma_{l_i}^2 = E(\varepsilon_i^2)$

Varianz der Funktion Φ :

theoretisch:
$$\sigma_x^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)^2 \sigma_{l_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)^2 \sigma_{l_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial l_n}\right)^2 \sigma_{l_n}^2$$

empirisch:
$$s_x^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)^2 s_{l_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)^2 s_{l_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial l_n}\right)^2 s_{l_n}^2$$

Standardabweichung

theoretisch:
$$\sigma_x = +\sqrt{\sigma_x^2}$$

empirisch:
$$s_x = +\sqrt{s_x^2}$$

6.4.3 Das allgemeine Kovarianzfortpflanzungsgesetz für mehrere Zielgrößen oder bei korrelierten Beobachtungen

(„Allgemeines Fehlerfortpflanzungsgesetz“ bzw. „Kovarianzfortpflanzungsgesetz“)

Das allgemeine Fehlerfortpflanzungsgesetz kommt zum Einsatz, wenn mehrerer Zielgrößen aus mehreren Beobachtungen (korreliert oder unkorreliert) berechnet werden.

Zur Berechnung der vollständigen Kovarianzmatrix der Zielgrößen muss das Fehlerfortpflanzungsgesetz in seiner allgemeineren Form (=Kovarianzfortpflanzungsgesetz) verwendet werden.

Schritt A: Aufstellen des funktionalen Modells für m funktionale Zusammenhänge $\Phi_j(\mathbf{l})$ mit n Beobachtungen l_i .

$$\begin{aligned} X_1 &= \Phi_1(\mathbf{l}) = f_1(l_1, l_2, \dots, l_n) \\ X_2 &= \Phi_2(\mathbf{l}) = f_2(l_1, l_2, \dots, l_n) \\ &\vdots \\ X_m &= \Phi_m(\mathbf{l}) = f_m(l_1, l_2, \dots, l_n) \end{aligned}$$

Schritt B: Bilden von m totalen Differentialen

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial l_1} \cdot dl_1 + \frac{\partial f_1}{\partial l_2} \cdot dl_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial l_n} \cdot dl_n \\ dx_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial l_1} \cdot dl_1 + \frac{\partial f_2}{\partial l_2} \cdot dl_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial l_n} \cdot dl_n \\ &\vdots \\ dx_m &= \frac{\partial f_m}{\partial l_1} \cdot dl_1 + \frac{\partial f_m}{\partial l_2} \cdot dl_2 + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial l_n} \cdot dl_n \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial l_i}$ lassen sich in einer Matrix \mathbf{F} zusammenfassen

mit $j=1,2,\dots,m$ und $i=1,2,\dots,n$

$$\mathbf{F}_{m,n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial l_1} & \frac{\partial f_1}{\partial l_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial l_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial l_1} & \frac{\partial f_2}{\partial l_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial l_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial l_1} & \frac{\partial f_m}{\partial l_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial l_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mn} \end{bmatrix}$$

Schritt C: Übergang auf die Varianzen

Kovarianzfortpflanzungsgesetz (Fehlerfortpflanzungsgesetz in allgemeiner Form):

$$\boxed{\Sigma_{xx} = \mathbf{F} \cdot \Sigma_{ll} \cdot \mathbf{F}^T} \text{ (theoretisch)} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\mathbf{S}_{xx} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}_{ll} \cdot \mathbf{F}^T} \text{ (empirisch)}$$

Σ_{xx} & \mathbf{S}_{xx} und Σ_{ll} & \mathbf{S}_{ll} sind Kovarianzmatrizen (Varianz-Kovarianzmatrizen) und beinhalten die (theoretischen) Varianzen σ_i^2 und Kovarianzen σ_{ij} bzw. die empirischen Varianzen s_i^2 und Kovarianzen s_{ij} .

Eingangs- und Ausgangsgrößen bei der „Fehlerfortpflanzung“:

$$\text{gegeben: } \Sigma_{ll} = \begin{bmatrix} \sigma_{l_1}^2 & \sigma_{l_1 l_2} & \dots & \sigma_{l_1 l_n} \\ \sigma_{l_1 l_2} & \sigma_{l_2}^2 & \dots & \sigma_{l_2 l_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{l_1 l_n} & \sigma_{l_2 l_n} & \dots & \sigma_{l_n}^2 \end{bmatrix} \quad \text{gesucht: } \Sigma_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \dots & \sigma_m^2 \end{bmatrix}$$

Die Berechnungen mittels des allgemeinen Kovarianzfortpflanzungsgesetzes schließen den Fall *einer Zielgröße bei unkorrelierten Beobachtungen („Totales Differential“* mit ein. Umgekehrt nicht!

6.4.4 Direktes und numerisches Differenzieren

Die zur Kovarianzfortpflanzung nach 6.4.2 bzw. 6.4.3 benötigten Differentialkoeffizienten („partiellen Ableitungen“): $\frac{\partial f_j}{\partial l_i}$ werden prinzipiell mittels „Direktem Differenzieren“ oder auch „analytischem Differenzieren“ (schlicht gesagt „Ableiten“) bereitgestellt.

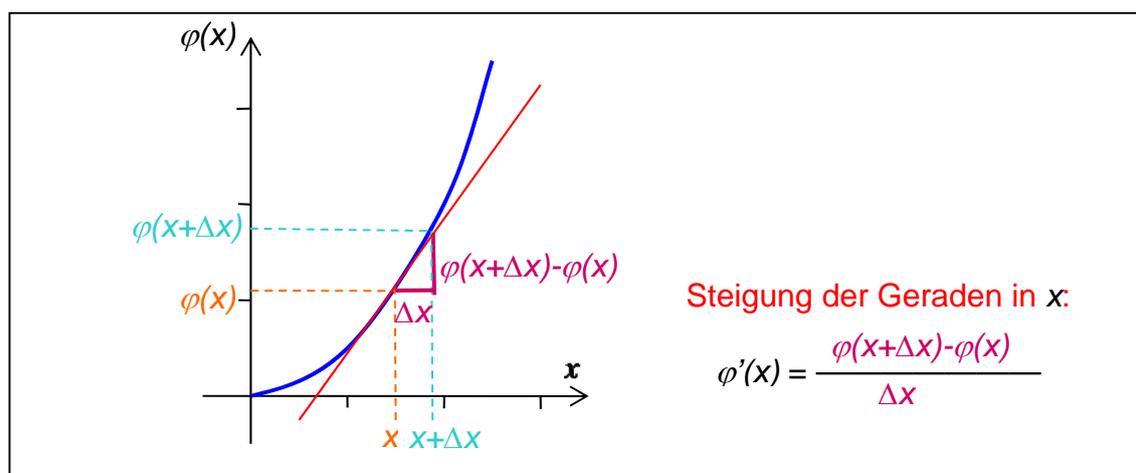
Das ist nicht immer problemlos möglich. Daher wird hier eine einfache Möglichkeit angegeben, die Ableitung einer Funktion an einer bestimmten Stelle x durch numerisches Differenzieren zu berechnen.

Problem: Häufig können die Differentialquotienten $\frac{\partial f_j}{\partial l_i}$ nur schwer analytisch bestimmt werden oder der Aufwand zur analytischen Bestimmung ist unverhältnismäßig hoch.

Lösung: Ersetzen der Differentialquotienten $\frac{\partial f_j}{\partial l_i}$ durch Differenzenquotienten $\frac{\Delta f_j}{\Delta l_i}$

Voraussetzung: Im Bereich der Δf_j muss die Funktion $f(l_1, l_2, \dots, l_n)$ lineares Verhalten aufweisen (Linearitätsbedingung) und die Δf_j müssen klein genug sein. Zu kleine Δf_j können zu numerischen Problemen bei der Berechnung führen.

Beispiel zum numerischen Differenzieren:



Übergang vom Differentialquotienten $f_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial l_j}$ zum Differenzenquotienten $f_{ij} = \frac{\Delta \varphi_i}{\Delta l_j}$:

Praktisches Vorgehen zum numerischen Differenzieren:

1. Berechnung der X_0 in ❶ unter Verwendung von l_1, l_2, \dots, l_n aus ❶
2. Festlegung der Δl_i in ❷ als kleine Zuschläge jeweils zu l_i (Tip: Wähle Δl_i in der Größenordnung der Standardabweichung oder eine Zehnerpotenz kleiner.)
3. Bilden der variierten Beobachtung ($l_i + \Delta l_i$) in ❸ (Es wird in einer Zeile i jeweils nur die eine Beobachtung l_i variiert \Rightarrow „Partielle Ableitung“)
4. Berechnung der veränderten Funktionswerte ($X_0 + \Delta \varphi_i$) in ❹ durch jeweiliges Einsetzen der um Δl_i variierten Beobachtung l_i in die Funktion $\varphi_{ji}(l_1, l_2, \dots, l_i + \Delta l_i, \dots, l_n)$ (bei m Unbekannten $\Rightarrow n \cdot m$ veränderte Funktionswerte)
5. In ❺ Berechnung der $\Delta \varphi_i = (X_0 + \Delta \varphi_i) - X_0$ (Spalte ❹ - Spalte ❶)
(Auswirkung einer kleinen Änderung Δl_i der Beobachtung l_i auf die Funktion φ_i)
6. Bilden der Differenzenquotienten $f_{ij} = \frac{\Delta \varphi_i}{\Delta l_j}$ in ❻
- 7a. Im Falle des „Totalen Differentials“ wird aus der Standardabweichungen s_i ❼ und dem Differenzenquotienten $f_i = \frac{\Delta \varphi_i}{\Delta l_i}$ ❻ für jede Beobachtungen l_i das Produkt $(s_i \cdot f_i)$ ❽ gebildet, quadriert $(s_i \cdot f_i)^2$ ❾ und aufsummiert $\sum_{i=1}^n (s_i \cdot f_i)^2$ ❿ (Rechengang entspricht 4.4.2)
- 7b. Im Falle der „Allgemeinen Kovarianzfortpflanzung“ kann die Matrix $\mathbf{F}_{m,n}$ statt mit den Differentialquotienten $\frac{\partial f_{ji}}{\partial l_i}$ direkt mit den Differenzenquotienten $f_{ji} = \frac{\Delta \varphi_{ji}}{\Delta l_i}$ aus ❻ gefüllt werden (weiterer Rechengang sind Matrizenoperationen gemäß 4.4.3)

	❶	❷	❸	❹	❺	❻	❼	❽	❾	
	l_i	X_0	$l_i + \Delta l_i$	$X_0 + \Delta \varphi_i$	$\Delta \varphi_i$	Δl_i	$f_i = \frac{\Delta \varphi_i}{\Delta l_i}$	s_i	$s_i \cdot f_i$	$(s_i \cdot f_i)^2$
l_1										
l_2										
l_n										
									$\sum_{i=1}^n (s_i \cdot f_i)^2$	❿

Fall 1: Unkorrelierte Beobachtungen, eine Zielgröße: $s_{X_0} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (s_i \cdot f_i)^2}$

Im Falle unkorrelierter Beobachtungen (siehe 6.4.2) erfolgen die Berechnungen mit den numerischen Ableitungen aus Spalte ⑥ als „Totales Differential“ in den Spalten ⑦ bis ⑩.

Fall 2: Im Falle korrelierter Beobachtungen (siehe 6.4.3) wird mit den numerischen Ableitungen aus Spalte ⑥ die Funktionalmatrix $\mathbf{F}_{1,n}$ gebildet. Die Berechnungen erfolgen als Matrizenprodukt $\mathbf{F}_{u,n} \cdot \Sigma_{n,n} \cdot \mathbf{F}_{n,u}^T$.

$\Sigma_{1,1}^{XX} = \mathbf{F}_{1,n} \cdot \Sigma_{n,n} \cdot \mathbf{F}_{n,1}^T = [\sigma_X^2]$ **Fall 2a): n korrelierte Beobachtungen, eine Zielgröße**

$$\mathbf{F}_{1,n} = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad \dots \quad f_n] = \begin{bmatrix} \frac{\Delta\varphi}{\Delta l_1} & \frac{\Delta\varphi}{\Delta l_2} & \frac{\Delta\varphi}{\Delta l_3} & \dots & \frac{\Delta\varphi}{\Delta l_n} \end{bmatrix}$$

$\Sigma_{u,u}^{XX} = \mathbf{F}_{u,n} \cdot \Sigma_{n,n} \cdot \mathbf{F}_{n,u}^T$ **Fall 2b): n korrelierte Beobachtungen und u korrelierte Zielgrößen**

$$\mathbf{F}_{u,n} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{u1} & f_{u2} & f_{u3} & \dots & f_{un} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta\varphi_1}{\Delta l_1} & \frac{\Delta\varphi_1}{\Delta l_2} & \frac{\Delta\varphi_1}{\Delta l_3} & \dots & \frac{\Delta\varphi_1}{\Delta l_n} \\ \frac{\Delta\varphi_2}{\Delta l_1} & \frac{\Delta\varphi_2}{\Delta l_2} & \frac{\Delta\varphi_2}{\Delta l_3} & \dots & \frac{\Delta\varphi_2}{\Delta l_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Delta\varphi_u}{\Delta l_1} & \frac{\Delta\varphi_u}{\Delta l_2} & \frac{\Delta\varphi_u}{\Delta l_3} & \dots & \frac{\Delta\varphi_u}{\Delta l_n} \end{bmatrix}$$

6.5 Häufige Standardfälle der Kovarianzfortpflanzung

Für immer wiederkehrende Aufgaben im Vermessungswesen werden häufig „auf die Schnelle“ Genauigkeitsabschätzungen gefordert. Diese werden i.A. für unkorrelierte Beobachtungen „im Kopf“ durchgeführt. Im Folgenden werden einige dieser Standardfälle aufgeführt. Die Darstellung erfolgt hier für empirische Varianzen s , ist aber natürlich genau so für theoretische Varianzen σ anzusetzen.

6.5.1 Skalieren von Messwerten mit konstantem Faktor

Funktionales Modell: $f(l) = a \cdot l$ mit $a = \text{konst.}$

Totales Differential: $df = \frac{\partial f}{\partial l} \varepsilon = a \cdot \varepsilon$

Varianz: $s_f^2 = a^2 \cdot s_l^2$

Standardabweichung: $s_f = +\sqrt{s_f^2} \quad s_f = a \cdot s_l$

Interpretation: Wird eine Messgröße skaliert, so ergibt sich dieselbe Skalierung für die Standardabweichung.

6.5.2 Addition oder Subtraktion von mehreren Messwerten

Funktionales Modell: $f(l_1, l_2, \dots, l_n) = \pm l_1 \pm l_2 \pm \dots \pm l_n$.

Totales Differential: $df = \pm \frac{\partial f}{\partial l_1} \varepsilon_1 \pm \frac{\partial f}{\partial l_2} \varepsilon_2 \pm \dots \pm \frac{\partial f}{\partial l_n} \varepsilon_n = \pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \dots \pm \varepsilon_n$.

Varianz: $s_f^2 = s_{l_1}^2 + s_{l_2}^2 + \dots + s_{l_n}^2$ (egal ob Addition oder Subtraktion)

Standardabweichung: $s_f = \sqrt{s_{l_1}^2 + s_{l_2}^2 + \dots + s_{l_n}^2}$

Interpretation: Bei der Addition/Subtraktion von Messgrößen ergibt sich die Gesamtvarianz als Summe der Einzelvarianzen.

Sonderfall gleich genauer Beobachtungen (alle l_i dieselbe Standardabweichung s_l):

$f(l_1, l_2, \dots, l_n) = \pm l_1 \pm l_2 \pm \dots \pm l_n$ mit $s_l = s_{l_1} = s_{l_2} = \dots = s_{l_n}$

Standardabweichung: $s_f = \sqrt{n} \cdot s_l$.

Interpretation: Die Standardabweichung wächst mit der Wurzel der Anzahl der Summanden.

6.5.3 Arithmetischer Mittelwert mehrerer Messwerte

Funktionales Modell:
$$\bar{x} = f(l_1, l_2, \dots, l_n) = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{n} = \frac{1}{n}l_1 + \frac{1}{n}l_2 + \dots + \frac{1}{n}l_n.$$

Totales Differential:
$$dx = \frac{1}{n}\varepsilon_1 + \frac{1}{n}\varepsilon_2 + \dots + \frac{1}{n}\varepsilon_n = \frac{1}{n}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n).$$

Varianz:
$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n^2}(s_{l_1}^2 + s_{l_2}^2 + \dots + s_{l_n}^2)$$

Standardfall gleich genaue Beobachtungen (alle l_i dieselbe Standardabweichung s_l):

$$s_l = s_{l_1} = s_{l_2} = \dots = s_{l_n}$$

Varianz:
$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot s_l^2 = \frac{s_l^2}{n}$$

Standardabweichung:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_l}{\sqrt{n}}$$

Interpretation:

Bei n -facher Wiederholung einer Messung derselben Zufallsgröße geht die Standardabweichung für deren Mittelwert mit dem Faktor $1/\sqrt{n}$ zurück.

7 Das Elementarfehlermodell

7.1 Hypothese der Elementarfehler

Die Hypothese der Elementarfehler wurde bereits 1837 von *BESSEL* und *HAGEN* entwickelt. Sie besagt, dass sich die zufälligen Abweichungen ε als eine Summe von q sehr kleinen Elementarfehlern Δ_i , darstellen lassen

$$\varepsilon = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots + \Delta_q,$$

die den folgenden Bedingungen genügen:

- alle Δ_i sind vom Betrag her gleich groß: $\Delta_i = |\delta| \quad \forall i$
 - unterscheiden sich nur im Vorzeichen: $\Rightarrow \varepsilon = \pm\delta \pm \delta \pm \delta \pm \delta \dots$
 - positive und negative Vorzeichen gleich wahrscheinlich: $P(\Delta_i = +\delta) = P(\Delta_i = -\delta) = 0,5$
- für $q \rightarrow \infty$ geht $\delta \rightarrow 0$ (für ∞ viele Elementarfehler werden die Abweichungen nahezu Null)

$$E(\Delta_h) = 0$$

$$\Rightarrow E(\varepsilon) = \sum_{h=1}^q E(\Delta_h) = 0 \quad \sigma^2 = E(\varepsilon^2) = \sum_{h=1}^q E(\Delta_h^2) = q \cdot \delta^2$$

Beispiele:

$$\text{mit } \varepsilon = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots + \Delta_q$$

$q = 1$:

Fall Nr.	Δ_1	ε	Häufigkeit (k)	Relative Häufigkeit=Wahrscheinlichkeit P
1	+	$+\delta$	1	0,5
2	-	$-\delta$	1	0,5

$q = 2$:

Fall Nr.	Δ_1	Δ_2	ε	Häufigkeit (k)	Relative Häufigkeit=Wahrscheinlichkeit P
1	+	+	$+2\delta$	1	0,25
2	+	-	0	2	0,5
3	-	+	0		
4	-	-	-2δ	1	0,25

$q = 4$

Fall Nr.	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	ε	Häufigkeit (k)	Relative Häufigkeit
1	+	+	+	+	4δ	1	0,0625
2	+	+	+	-	2δ	4	0,25
3	+	+	-	+			
4	+	-	+	+			
5	-	+	+	+			
6	+	+	-	-	0	6	0,375
7	+	-	-	+			
8	-	-	+	+			
9	-	+	+	-			
10	-	-	+	+			
11	+	-	+	-			
12	-	-	-	+	-2δ	4	0,25
13	-	-	+	-			
14	-	+	-	-			
15	+	-	-	-			
16	-	-	-	-	-4δ	1	0,0625

Je größer die Abweichung (der „Fehler“), desto geringer ist die Wahrscheinlichkeit!

„Pascalsches Dreieck“

$\varepsilon = \sum \Delta_i$	-6δ	-5δ	-4δ	-3δ	-2δ	$-\delta$	0	$+\delta$	$+2\delta$	$+3\delta$	$+4\delta$	$+5\delta$	$+6\delta$	$\sum k$
$q=1$						1		1						2
$q=2$					1		2		1					4
$q=3$				1		3		3		1				8
$q=4$			1		4		6		4		1			16
$q=5$		1		5		10		10		5		1		32
$q=6$	1		6		15		20		15		6		1	64

Wahrscheinlichkeit :

$$p_i(\varepsilon) = \frac{k_i}{\sum k}$$

Formel für mögliche Fälle:

$$\varepsilon = (q - 2w) \cdot \delta \quad \text{mit } w = 0, 1, 2, \dots, q$$

für $q=1$:

$w=0$	$\varepsilon=(1-2\cdot 0)\cdot \delta$	$+\delta$
$w=1$	$\varepsilon=(1-2\cdot 1)\cdot \delta$	$-\delta$

für $q=2$:

$w=0$	$\varepsilon=(2-2\cdot 0)\cdot \delta$	$+2\delta$
$w=1$	$\varepsilon=(2-2\cdot 1)\cdot \delta$	0
$w=2$	$\varepsilon=(2-2\cdot 2)\cdot \delta$	-2δ

für $q=4$:

$w=0$	$\varepsilon=(4-2\cdot 0)\cdot\delta$	$+4\delta$
$w=1$	$\varepsilon=(4-2\cdot 1)\cdot\delta$	$+2\delta$
$w=2$	$\varepsilon=(4-2\cdot 2)\cdot\delta$	0
$w=3$	$\varepsilon=(4-2\cdot 3)\cdot\delta$	-2δ
$w=4$	$\varepsilon=(4-2\cdot 4)\cdot\delta$	-4δ

Allgemeines Bildungsgesetz:

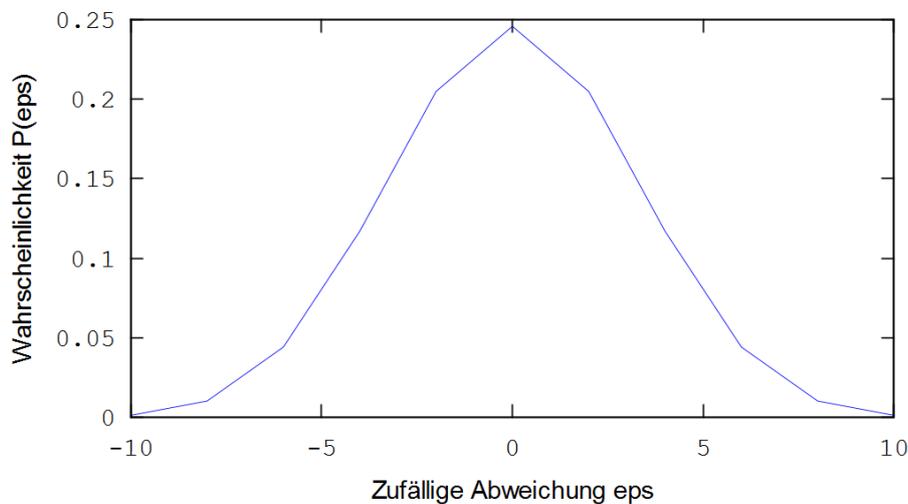
$$p(\varepsilon) = P\{\varepsilon = (q - 2w)\delta\} = \frac{1}{2^q} \binom{q}{w}, \quad w = 0, 1, 2, 3, \dots, q \quad \text{mit} \quad \binom{q}{w} = \frac{q!}{(q-w)! w!}$$

Anmerkungen: $\sum_{w=0}^q \binom{q}{w} = 2^q$ und $\sum_{w=0}^q P(\varepsilon) = \frac{1}{2^q} \sum_{w=0}^q \binom{q}{w} = 1$

$q = 10, w=0,1,\dots,10$ (bei 10 Elementarfehlern direkt berechnete Wahrscheinlichkeiten)

w	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ε	10δ	8δ	6δ	4δ	2δ	0	-2δ	-4δ	-6δ	-8δ	-10δ
$P(\varepsilon)$	0,001	0,010	0,044	0,117	0,205	0,246	0,205	0,117	0,044	0,010	0,001

Graphische Darstellung für $q=10$



Für „Grenzübergang“ $q \rightarrow \infty$ und $\delta \rightarrow 0$:

$$P(\xi \leq \varepsilon < \xi + d\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\cdot\sigma^2}\right) d\xi = f(\xi) d\xi$$

mit: $\sigma =$ Konstante noch nicht näher definiert
 $f(\xi) =$ Dichte der Normalverteilung

7.2 Korrelierende und nicht-korrelierende Elementarfehler

Gegeben:

- Zufallsvektor $\mathbf{L}_{1,n}^T = [L_1 \quad L_2 \quad \dots \quad L_n]$
- Erwartungswertvektor: $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{L}_{1,n}}^T = [\mu_1 \quad \mu_2 \quad \dots \quad \mu_n] = E(\mathbf{L}_{1,n}^T)$
- Abweichungsvektor: $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{L}_{1,n}}^T = \mathbf{L}_{1,n}^T - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{L}_{1,n}}^T = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \dots \quad \varepsilon_n]$

Alle Zahlenwerte sind unbekannt !!

Gesucht:

- „Synthetische“ Kovarianzmatrix: $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{L}_{n,n}} = E(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{L}_{n,1}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{L}_{1,n}}^T)$ von $\mathbf{L}_{n,1}$,

(hier keine „empirische“ Berechnung mittels Wiederholungsmessungen, keine rein „theoretische“ Schätzung)

Lösung: Elementarfehlermodell

δ_i - nicht-korrelierender Elementarfehler, beeinflusst nur ein L_i
 d_i - Einflussfaktor der nicht-korrelierenden Elementarfehler
 beschreibt Einfluss von δ_i auf L_i (häufig mit 1 anzusetzen)

ξ_j - korrelierender Elementarfehler, beeinflusst mehrere L_i
 f_{ji} - Einflussfaktor korrelierender Elementarfehler, beschreibt Einfluss von ξ_j auf L_i
 mit $i = 1, 2, \dots, n$ - Anzahl der Beobachtungen / nicht-korrelierenden Elementarfehler
 und $j = 1, 2, \dots, m$ - Anzahl der korrelierenden Elementarfehler

Synthese einer zufälligen Abweichung aus korrelierenden und nicht-korrelierenden Elementarfehlern:

$$\varepsilon_i = f_{1i} \cdot \xi_1 + f_{2i} \cdot \xi_2 + \dots + f_{mi} \cdot \xi_m + d_i \cdot \delta_i$$

Elementarfehlervektoren:

- nicht korrelierend: $\boldsymbol{\delta}_{n,1} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix}$ mit $E(\boldsymbol{\delta}) = \mathbf{0}$

- korrelierend $\boldsymbol{\xi}_{m,1} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}$ mit $E(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0}$

Einflussmatrizen:

- nicht korrelierend: $\mathbf{D}_{n,n} = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L_1}{\partial \delta_1} & & & \\ & \frac{\partial L_2}{\partial \delta_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\partial L_n}{\partial \delta_n} \end{pmatrix}$

häufig gilt: $d_1 = d_2 = \dots = d_n = 1$, dann folgt: $\mathbf{D} = \mathbf{I}$.

- korrelierend $\mathbf{F}_{n,m} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial L_1}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial L_1}{\partial \xi_m} \\ \frac{\partial L_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial L_2}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial L_2}{\partial \xi_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial L_n}{\partial \xi_1} & \frac{\partial L_n}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial L_n}{\partial \xi_m} \end{pmatrix}$

Vektor der zufälligen Abweichungen:

$$\mathbf{\varepsilon}_{L_{n,1}} = \mathbf{F}_{n,m} \cdot \boldsymbol{\xi}_{m,1} + \mathbf{D}_{n,n} \cdot \boldsymbol{\delta}_{n,1}$$

oder vereinfacht für $\mathbf{D} = \mathbf{I}$:

$$\mathbf{\varepsilon}_{L_{n,1}} = \mathbf{F}_{n,m} \cdot \boldsymbol{\xi}_{m,1} + \boldsymbol{\delta}_{n,1}$$

daraus Kovarianzmatrix:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{LL_{n,n}} = E \left(\mathbf{\varepsilon}_{L_{n,1}} \cdot \mathbf{\varepsilon}_{L_{1,n}}^T \right)$$

7.3 Aufbau einer synthetischen Kovarianzmatrix aus Elementarfehlern

Anwendung des Kovarianzfortpflanzungsgesetz auf die Berechnung des Vektors der zufälligen Abweichungen:

Kovarianzmatrix der Beobachtungen: $\boldsymbol{\Sigma}_{LL_{n,n}} = E \left(\mathbf{\varepsilon}_{L_{n,1}} \cdot \mathbf{\varepsilon}_{L_{1,n}}^T \right)$

Man benötigt die Kovarianzmatrizen der korrelierenden $E(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}^T) = \boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}$ und der nicht korrelierenden $E(\boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{\delta}^T) = \boldsymbol{\Sigma}_{\delta\delta}$ Elementarfehler.

Beide sind als Diagonalmatrizen definiert; da

$$E(\delta_i \cdot \delta_k) = 0 \quad \text{und} \quad E(\xi_{li} \cdot \xi_{kj}) = 0 \quad \text{für} \quad i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j \quad \text{und} \quad k, l = 1, 2, \dots, m; k \neq l;$$

Elementarfehler selbst sind untereinander unkorreliert, wirken evtl. korrelierend auf die Beobachtungen

zusätzlich gilt auch: $E(\delta_i \cdot \xi_{kj}) = 0$ für alle i, j und k .

Synthetische Kovarianzmatrix der Beobachtungen

Für $\mathbf{D} = \mathbf{I}$: $\mathbf{\varepsilon}_L = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta}$ einsetzen in $\boldsymbol{\Sigma}_{LL} = E \left(\mathbf{\varepsilon}_L \cdot \mathbf{\varepsilon}_L^T \right)$:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\Pi} = E(\mathbf{\varepsilon}_L \cdot \mathbf{\varepsilon}_L^T)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\Pi} = E((\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta}) \cdot (\boldsymbol{\xi}^T \cdot \mathbf{F}^T + \boldsymbol{\delta}^T))$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\Pi} = E(\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}^T \cdot \mathbf{F}^T + \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\delta}^T + \boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{\xi}^T \cdot \mathbf{F}^T + \boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{\delta}^T)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\Pi} = \mathbf{F} \cdot \underbrace{E(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}^T)}_{\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}} \cdot \mathbf{F}^T + \mathbf{F} \cdot \underbrace{E(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\delta}^T)}_{E(\delta_i \cdot \xi_{kj})=0} + \underbrace{E(\boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{\xi}^T)}_{E(\delta_i \cdot \xi_{kj})=0} \cdot \mathbf{F}^T + \underbrace{E(\boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{\delta}^T)}_{\boldsymbol{\Sigma}_{\delta\delta}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Sigma}_{\Pi} = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi} \cdot \mathbf{F}^T + \boldsymbol{\Sigma}_{\delta\delta}}$$

Allgemein für $\mathbf{D} \neq \mathbf{I}$: $\boxed{\boldsymbol{\Sigma}_{\Pi} = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi} \cdot \mathbf{F}^T + \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{\delta\delta} \cdot \mathbf{D}^T}$

- Die Einflussfaktoren und damit die entsprechenden Matrizen \mathbf{F}, \mathbf{D} können über in der Regel bekannte Modellvorstellungen ermittelt werden.
- Die Abschätzung der Kovarianzmatrizen der Elementarfehler $\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}, \boldsymbol{\Sigma}_{\delta\delta}$ erfolgt auf Basis von Erfahrungswerten oder Firmenangaben oder Annahmen über maximal mögliche Fehler (Informationen in der Regel unsicherer).

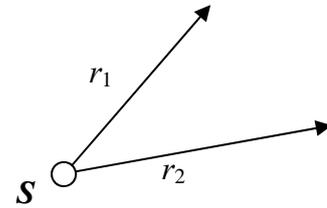
7.3.1 Beispiel „Synthetische Kovarianzmatrix für die Richtungsmessung“

Auf dem Standpunkt S wurden die Richtungen r_1 und r_2 beobachtet. Berechnen Sie die synthetische Kovarianzmatrix für diese Richtungsmessung.

Für dieses Elementarfehlermodell hier sind Zielachsfehler, Kippachsfehler und Ableseunsicherheiten zu berücksichtigen. Weitere Fehlerquellen werden hier vernachlässigt.

Auf alle Beobachtungen wirksam \Rightarrow *korrelierend*:

Zielachsfehler: $\xi_1 = c$
 Kippachsfehler: $\xi_2 = i$



Nur individuell auf eine Beobachtung wirksam \Rightarrow *nicht korrelierend*:

Anziel-/Ableseunsicherheit: δ_i

Mathematisches Modell:

$$r_i = r_{i, \text{gem}} - \underbrace{\frac{c}{\sin z_i}}_{\text{Einfluß von } c \text{ auf eine Richtung}} - \underbrace{\frac{i}{\tan z_i}}_{\text{Einfluß von } i \text{ auf eine Richtung}}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_i = -\frac{c}{\sin z_i} - \frac{i}{\tan z_i} + \delta_i \quad \text{zufällige Abweichung}$$

Einflussmatrizen:

korrelierend:

$$\mathbf{F}_{n,m} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial c} & \frac{\partial r_1}{\partial i} \\ \frac{\partial r_2}{\partial c} & \frac{\partial r_2}{\partial i} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial r_n}{\partial c} & \frac{\partial r_n}{\partial i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sin z_1} & -\cot z_1 \\ -\frac{1}{\sin z_2} & -\cot z_2 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{\sin z_n} & -\cot z_n \end{pmatrix} \quad \text{Einflüsse von Ziel- und Kippachsfehler}$$

nicht korrelierend:

$$\mathbf{D}_{n,n} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_{n,n} \quad \text{individuelle Ableseunsicherheiten}$$

$\Sigma_{\text{II}} = \mathbf{F} \cdot \Sigma_{\xi\xi} \cdot \mathbf{F}^T + \Sigma_{\delta\delta}$ mit $\Sigma_{\xi\xi}, \Sigma_{\delta\delta}$ abgeleitet aus Erfahrungswerten/Herstellerangaben mit $n \rightarrow \infty$

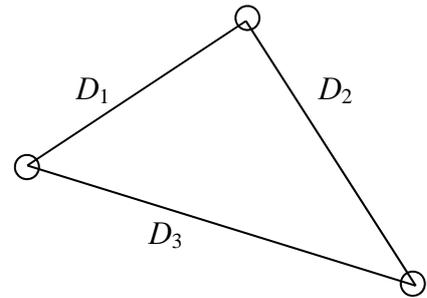
7.3.2 Beispiel „Synthetische Kovarianzmatrix für die Streckenmessung“

Die Längen der Seiten eines Dreiecks seien mit einem elektrooptischen Distanzmessgerät (EDM) bestimmt worden. Die Messung erfolgte mit demselben Instrument an verschiedenen Tagen unter unterschiedlichen Wetterbedingungen.

Für dieses Elementarfehlermodell hier sind zum einen aus der Kalibrierung die Instrumentenfehler Additionswert und Frequenz-/Maßstabskorrektur und zum anderen die Einstellunsicherheit des Prismas sowie die meteorologischen Korrekturen zu berücksichtigen. Weitere Fehlerquellen werden vernachlässigt.

Auf alle Beobachtungen wirksam \Rightarrow *korrelierend*:

Additionswert: $\xi_1 = a$
 Frequenzkorrektur: $\xi_2 = \varphi$



Nur individuell auf eine Beobachtung wirksam \Rightarrow *nicht korrelierend*:

Anziel-/Ableseunsicherheit: $\delta_i = \sqrt{1,0mm + 1,0ppm}$

Mathematisches Modell:

$$D_i = D_{i,gem} + \underbrace{a}_{\text{Einfluß von } a \text{ auf eine Richtung}} + \underbrace{D \cdot \varphi}_{\text{Einfluß von } \varphi \text{ auf eine Richtung}}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_i = a + D \cdot \varphi + \delta_i \quad \text{zufällige Abweichung}$$

Einflussmatrizen:

korrelierend:

$$\mathbf{F}_{n,m} = \begin{pmatrix} \frac{\partial D_1}{\partial a} & \frac{\partial D_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial D_2}{\partial a} & \frac{\partial D_2}{\partial \varphi} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial D_n}{\partial a} & \frac{\partial D_n}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & D_1 \\ 1 & D_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & D_n \end{pmatrix} \quad \text{Einflüsse von Additionswert und Maßstab}$$

nicht korrelierend:

$$\mathbf{D}_{n,n} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_{n,n} \quad \text{individuelle Anzielunsicherheiten und Meteorologie}$$

$\Sigma_{\Pi} = \mathbf{F} \cdot \Sigma_{\xi\xi} \cdot \mathbf{F}^T + \Sigma_{\delta\delta}$ mit $\Sigma_{\xi\xi}, \Sigma_{\delta\delta}$ abgeleitet aus Erfahrungswerten/Herstellerangaben mit $n \rightarrow \infty$

Wenn alle Messungen nahezu zeitgleich unter nahezu identischen Wetterbedingungen stattgefunden hätten, wären die ppm-Korrektur als korrelierend anzusetzen und in \mathbf{F} als zusätzliche Spalte zu berücksichtigen.

7.4 Eigenschaften der synthetischen Kovarianzmatrix

Behauptung: Ein Vektor zufälliger Abweichungen eines Vektors $\mathbf{L}_{n,1}$ läßt sich stets darstellen in der Form

$$\mathbf{\varepsilon}_{n,1} = \mathbf{F}_{n,m} \cdot \boldsymbol{\xi}_{m,1} + \boldsymbol{\delta}_{n,1}$$

$\boldsymbol{\xi}_{m,1}$ Vektor korreliernder Elementarfehler

$\mathbf{F}_{n,m}$ Einflußmatrix

$\boldsymbol{\delta}_{n,1}$ Vektor nicht- korreliernder Elementarfehler

Trifft die Behauptung zu, gilt:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\parallel} = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi} \cdot \mathbf{F}^T + \boldsymbol{\Sigma}_{\delta\delta}$$

- $\boldsymbol{\Sigma}_{\parallel}$ ist positiv definit ($\det(\boldsymbol{\Sigma}_{\parallel}) > 0$), wenn $\boldsymbol{\Sigma}_{\delta\delta} \neq \mathbf{0}$

- $\boldsymbol{\Sigma}_{\parallel}$ ist positiv semi-definit ($\det(\boldsymbol{\Sigma}_{\parallel}) = 0$), wenn $\boldsymbol{\Sigma}_{\delta\delta} = \mathbf{0}$

Erläuterung: Positiv definit: $\lambda_i \in \mathbb{R} \wedge \lambda_i > 0$

Positiv semi-definit: $\lambda_i \in \mathbb{R} \wedge \lambda_i \geq 0$

Beweis:

Für beliebige Vektoren $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \wedge \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ ist $\boldsymbol{\Sigma}_{\parallel}$ positiv definit, wenn $\mathbf{y}^T \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{\parallel} \cdot \mathbf{y} > 0$ und positiv semi-definit, wenn $\mathbf{y}^T \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{\parallel} \cdot \mathbf{y} \geq 0$ (aus ZURMÜHL, Matrizen).

$$\mathbf{y}^T \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{\parallel} \cdot \mathbf{y} = \underbrace{\mathbf{y}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{y}}_{\rightarrow b)} + \underbrace{\mathbf{y}^T \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{\delta\delta} \cdot \mathbf{y}}_{\rightarrow a)}$$

Untersuchung der Summanden:

$$a) \quad \mathbf{y}^T \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{\delta\delta} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \sigma_2^2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{y} = y_1^2 \cdot \sigma_1^2 + y_2^2 \cdot \sigma_2^2 + \dots + y_n^2 \cdot \sigma_n^2 > 0,$$

falls $\sigma_i \neq 0$ für mindestens ein $i \Rightarrow$ positiv definit !

$$b) \quad \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{y}$$

$\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}$ positiv definit (Ableitung, wie in a))

$\Rightarrow \mathbf{K}$ positiv definit oder positiv semi-definit (aus ZURMÜHL, Matrizen)

$$\mathbf{y}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{y} \geq 0$$

$$a) + b) : \quad \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{\delta\delta} \cdot \mathbf{y} > 0$$

Zusammenfassung der Eigenschaften:

Eine Kovarianzmatrix Σ_{LL} ist positiv-definit und damit invertierbar, wenn wenigstens ein individueller Elementarfehler δ_i im Zufallsvektor \mathbf{L} vorkommt.

Σ_{ll} ist positiv definit! $\Rightarrow \mathbf{Q}_{ll} = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \Sigma_{ll}$ ist regulär! (Kofaktormatrix)

$\Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{Q}_{ll}^{-1}$ existiert!

Inverse der Kofaktormatrix hat große Bedeutung als Gewichtsmatrix in der Ausgleichsrechnung!

8 Statistische Verteilungen

8.1 Die Normalverteilung

8.1.1 Der zentrale Grenzwertsatz

Definition: Eine Zufallsgröße ist stets dann normalverteilt, wenn sie als Summe von sehr vielen „Elementarfehlern“ dargestellt werden kann, die alle mehr oder weniger dieselbe Größenordnung besitzen.

Es sei: $\varepsilon = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_m$

mit: ε zufällige Abweichung
 Δ_i elementare Komponente der Abweichung

$$E(\Delta_i) = 0 \quad \forall i$$

$$m \rightarrow \infty$$

es sei kein Δ_i dominant

Vergleich mit *BESSEL* und *HAGEN*:

- alle Δ_i sind vom Betrag her gleich groß: $\Delta_i = |\delta| \quad \forall i$
 - unterscheiden sich nur im Vorzeichen: $\Rightarrow \varepsilon = \pm\delta \pm \delta \pm \delta \pm \delta \dots$
 - positive und negative Vorzeichen gleich wahrscheinlich: $P(\Delta_i = +\delta) = P(\Delta_i = -\delta) = 0,5$
- für $n \rightarrow \infty$ geht $\delta \rightarrow 0$ (für ∞ viele Elementarfehler werden die Abweichungen nahezu Null)

Dann gilt die Wahrscheinlichkeitsbeziehung

$$P(\xi \leq \varepsilon < \xi + d\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\xi^2}{\sigma^2}\right) d\xi = f(\xi) d\xi$$

mit: σ Konstante
 $f(\xi)$ Dichte der Normalverteilung

Historie des zentralen Grenzwertsatzes

de Moivre	1730	beide nur
Laplace	1812	Vermutung
Gauß	1821	Einführung in Fehlertheorie, daher auch <u>Gauß-Verteilung</u>
Ljapunov	1901	<u>Beweis!</u>

In der Praxis: Anforderungen nicht so streng.

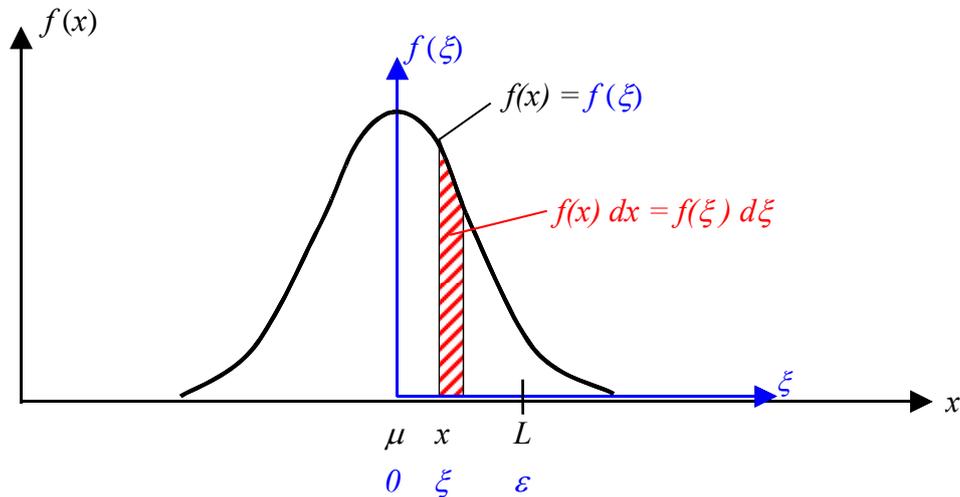
Es reichen sehr viele Elementarfehler, die alle mehr oder weniger die gleiche Größenordnung haben
 \rightarrow Normalverteilung

8.1.2 Erwartungswert und Varianz einer normalverteilten Zufallsgröße

Gegeben: - Zufallsgröße L

$$L = \mu + \varepsilon \rightarrow \varepsilon = L - \mu \quad \text{mit } \mu \text{ Erwartungswert } E(L)$$

ε zufällige Abweichung
 $f(x)$ Dichte von L



Verschieben des Koordinatensystems:

$$x = \mu + \xi \rightarrow \xi = x - \mu \rightarrow \underbrace{d\xi = dx}_{\text{keine Maßstabsänderung}} \rightarrow f(x) = f(\xi)$$

einsetzen in $P(\xi \leq \varepsilon < \xi + d\xi) = \underbrace{f(\xi)}_{f(x)} \underbrace{d\xi}_{dx}$

$$P(x - \mu \leq L - \mu < x - \mu + dx)$$

$$P(x \leq L < x + dx) = f(x) dx$$

Normalverteilung nach Grenzwertsatz: $f(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\xi^2}{\sigma^2}\right)$

Substitution: $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right) = f(x)$

$$P(x \leq L < x + dx) = \underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right)}_{f(x)} dx$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte und somit auch die Verteilungsfunktion einer normalverteilten Zufallsgröße sind durch Angabe zweier Parameter, des Erwartungswerts μ und der Varianz σ^2 , vollständig bestimmt.

Behauptungen:

1. $f(x)$ erfüllt notwendige Bedingung für Wahrscheinlichkeitsdichte (prüft eigentlich $f(\xi)$)
2. $E(L) = \mu$ Translation erlaubt?
3. $E(\varepsilon^2) = E((L - \mu)^2) = \sigma^2$ Erwartungswert von ε^2 ist Varianz σ^2 (Interpretation der Konstanten σ)

Beweis: Behauptungen sind korrekt, wenn:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \\
 2) \quad & E(L) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \mu \\
 3) \quad & E(\varepsilon^2) = E((L - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx = \sigma^2
 \end{aligned}$$

← sind zu beweisen

Zwischenschritt: *Hilfsintegrale aus Formelsammlung:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \sqrt{2\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \sqrt{2\pi}$$

Substitution:

$$y = \frac{x - \mu}{\sigma} \Rightarrow x = \sigma \cdot y + \mu \Rightarrow dx = \sigma dy$$

Beweis zu Behauptung 1): $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \cdot \sigma dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy}_{\sqrt{2\pi}} = 1 \quad (\checkmark)
 \end{aligned}$$

Beweis zu Behauptung 2): $E(L) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx \stackrel{!}{=} \mu$

$$\begin{aligned}
 E(L) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx \\
 &= \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma \cdot y + \mu) \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \cdot \sigma dy \\
 &\quad \text{ausmultiplizieren} \Rightarrow \text{zwei Integrale} \\
 &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy}_0 + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy}_{\sqrt{2\pi}} \\
 &= \frac{\mu \cdot \sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} = \underline{\underline{\mu}}
 \end{aligned}$$

(✓)

Beweis zu Behauptung 3): $E(\varepsilon^2) = E((L - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx \stackrel{!}{=} \sigma^2$

vorab: $x - \mu = \sigma \cdot y$ da $y = \frac{x - \mu}{\sigma}$

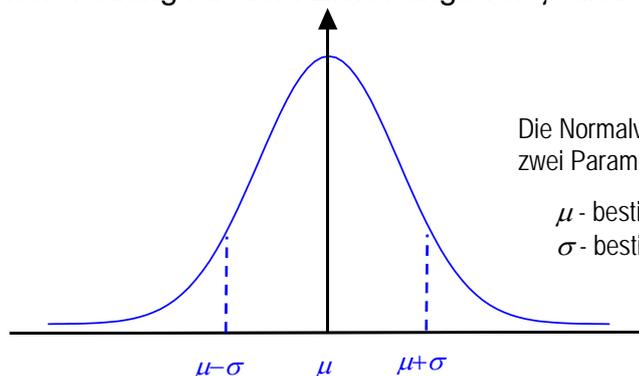
$$\begin{aligned}
 E(\varepsilon^2) &= E((L - \mu)^2) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx \\
 &= \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 \cdot y^2 \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \cdot \sigma dy \\
 &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy}_{\sqrt{2\pi}} = \underline{\underline{\sigma^2}}
 \end{aligned}$$

(✓)

Erwartungswert μ und Varianz σ^2 sind die einzigen Parameter der Normalverteilung

$$L \sim N(\mu, \sigma^2)$$

„L folgt der Normalverteilung mit dem Erwartungswert μ und der Varianz σ^2 “



Die Normalverteilung ist von zwei Parametern abhängig:

- μ - bestimmt die Lage
- σ - bestimmt die Form

8.1.3 Die Standard-Normalverteilung

Definierter Sonderfall der Normalverteilung:

$$\left. \begin{array}{l} \mu = 0 \\ \sigma^2 = 1 \end{array} \right\} N(0,1)$$

Standard-Normalverteilung

standardisierter Sonderfall für Erwartungswert $\mu=0$ (Mittelwert) und Varianz $\sigma^2=1$.

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

Dichte von $N(0,1)$ (tabelliert, einfach zu berechnen)

Beziehung zwischen $N(\mu, \sigma^2)$ und $N(0,1)$:

Allgemein war die Dichte von $N(\mu, \sigma^2)$: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$

Satz: $L \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \left(\bar{\varepsilon} = \frac{L-\mu}{\sigma}\right) = \frac{\varepsilon}{\sigma} \sim N(0,1)$

Beweis: $L \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$ Wahrscheinlichkeitsdichte

Variablentransformation: $\bar{\varepsilon}(L) = \frac{L-\mu}{\sigma} = g(L)$ (1)

$\Rightarrow y = \frac{x-\mu}{\sigma} = g(x)$ (2)

mit: $f(x) dx = f(y) dy \Rightarrow f(y) = f(x) \cdot \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ und $y + dy = g(x + dx)$

$g'(x) = \frac{dy}{dx} \Rightarrow f(y) = \frac{f(x)}{g'(x)}$ (3)

$g'(x) = \frac{1}{\sigma}$ (4) Ableitung von (2) nach x

mit $f(x)$ - Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung
und $f(y)$ - Wahrscheinlichkeitsdichte der Standard-Normalverteilung

Einsetzen:

$$f(y) = \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) = \varphi(y)$$

⇒ jede beliebige Normalverteilung kann in eine Standardnormalverteilung transformiert werden; für normierte zufällige Abweichung gilt dann:

$$\bar{\varepsilon} \sim N(0,1)$$

8.1.4 Die Verteilungsfunktion der Normalverteilung

$$F(x) = P(L \leq x) = \int_{-\infty}^x f(v) dv \quad \text{Definition der Verteilungsfunktion}$$

$f(v)$

Dichte von L

speziell:

$$f(v) = \varphi(v)$$

Dichte der Standard-Normalverteilung $N(0,1)$

$$\Phi(y) = P(\bar{\varepsilon} \leq y) = \int_{-\infty}^y \varphi(v) dv$$

$$\bar{\varepsilon} \sim N(0,1)$$

$$\varphi(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)$$

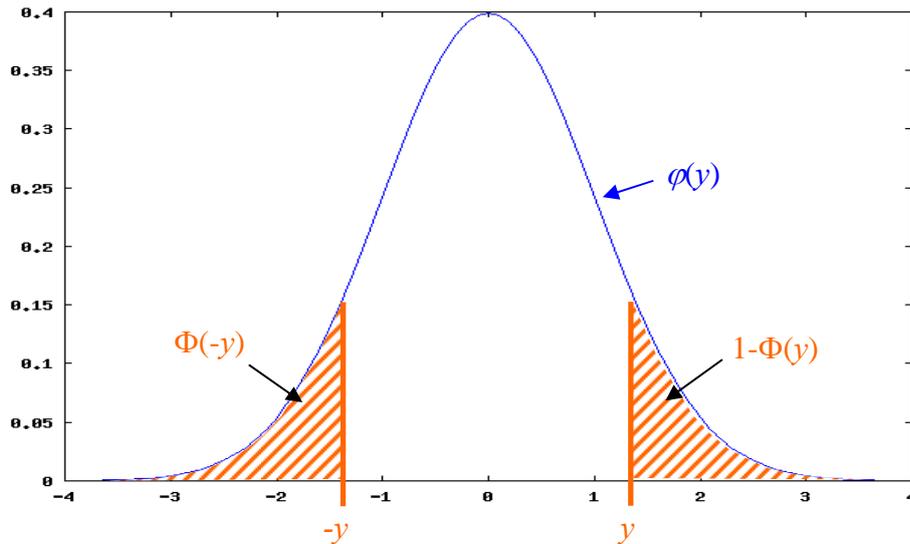
Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung

Anwendung: Grenzen für zufällige Abweichungen ε

Allgemein: $P(a \leq L \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(v) dv$

$$F(b) = \int_{-\infty}^b f(x) dx \quad \text{und} \quad F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

Spezialisierung für Standard-Normalverteilung $N(0,1)$:



Ersetzen L mit $\bar{\varepsilon}$ und die Grenzen a, b durch $-y, y$

$$\Rightarrow \frac{P(-y \leq \bar{\varepsilon} \leq y) = \Phi(y) - \Phi(-y)}{\Phi(-y) = 1 - \Phi(y)} \quad (\text{gemäß Skizze herrscht Symmetrie})$$

mit $\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sigma}$ und $\Phi(y) - (1 - \Phi(y)) = 2 \cdot \Phi(y) - 1$ wird $P(-y \leq \frac{\varepsilon}{\sigma} \leq y) = 2 \cdot \Phi(y) - 1$

umformen der Ungleichung $-y \leq \frac{\varepsilon}{\sigma} \leq y$ Multiplikation mit σ ergibt $-y \cdot \sigma \leq \varepsilon \leq y \cdot \sigma$

$$P(-y \cdot \sigma < \varepsilon \leq y \cdot \sigma) = P(|\varepsilon| \leq y \cdot \sigma) = 2 \cdot \Phi(y) - 1$$

Grenze für zufällige Abweichungen („wahre Fehler“)

Beispiele (Werte aus Tabelle):

$y \Rightarrow$	$P = 2\Phi(y) - 1$	$P = 2\Phi(y) - 1 \Rightarrow$	y
1	0,6827	0,900	1,645
2	0,9545	0,950	1,960
3	0,9973	0,990	2,576
4	0,9999	0,999	3,292

Vorgegeben y

$\Phi(y)$ aus Tabelle

Vorgegeben P

y umgekehrt aus Tabelle

$P(|\varepsilon| < \sigma) = 0,683 = 68,3\%$ 2/3 aller Abweichungen sind kleiner als σ

$P(|\varepsilon| < 3\sigma) = 0,997 = 99,7\%$ 3 σ - Regel für Grenz oder Maximalfehler (Größere Fehler als 3 σ sind äußerst selten)

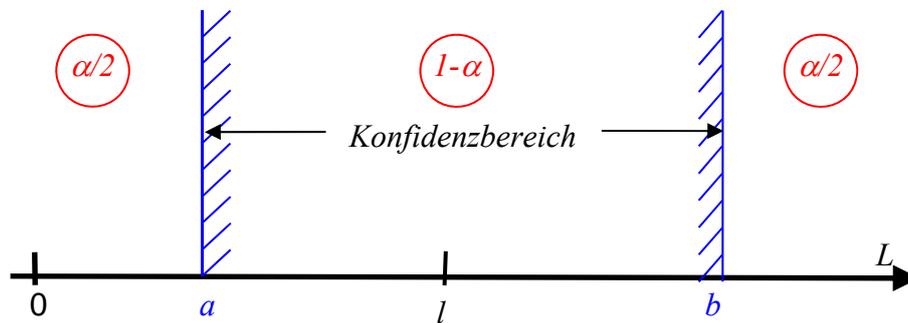
8.1.5 Der Konfidenzbereich für normalverteilte Zufallsgrößen

Der Konfidenzbereich oder auch Vertrauensbereich stellt ein Intervall um den Messwert dar, in dem sich der Erwartungswert mit einer vorgegebenen Sicherheitswahrscheinlichkeit $S=1-\alpha$ befindet.

Bei bekanntem Erwartungswert μ ist er um diesen definiert. In diesem Fall gilt: Intervall um den Erwartungswert μ , in dem sich Messwerte mit einer vorgegebenen Sicherheitswahrscheinlichkeit $S=1-\alpha$ befinden.

Gegeben: $L \sim N(\mu, \sigma^2)$ Erwartungswert μ unbekannt
 Varianz σ^2 bekannt

Irrtumswahrscheinlichkeit α wird idR. zu $\alpha=0,05$ (5%) oder $\alpha=0,01$ (1%) gesetzt



Definition:

$$P(a \leq \mu \leq b) = 1 - \alpha$$

$$P(\mu < a) = P(\mu > b) = \frac{\alpha}{2}$$

Konfidenzbereich für μ

Gesucht:

a, b

Grenzen des Konfidenzbereichs

Lösung:

$P(-y \leq \bar{\varepsilon} \leq +y) = 2\Phi(y) - 1$ Ausgangsbeziehung

a) Umformung des Ungleichungssystems:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{l - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$-y \leq \frac{l - \mu}{\sigma} \leq +y \quad | \cdot \sigma$$

$$-y\sigma \leq l - \mu \leq y\sigma \quad | -l$$

$$-l - y\sigma \leq -\mu \leq y\sigma - l \quad | \text{ Vorzeichenumkehr}$$

$$l + y\sigma \geq \mu \geq l - y\sigma \quad | \text{ umordnen}$$

$$l - y\sigma \leq \mu \leq l + y\sigma$$

b) Argument y der Verteilungsfunktion

$$1 - \alpha = 2\Phi(y) - 1$$

$$2 - \alpha = 2\Phi(y)$$

$$\Rightarrow \Phi(y) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow y \text{ aus der Tabelle unter Vorgabe } \Phi(y) = P$$

$$\boxed{\begin{matrix} a = l - y\sigma \\ b = l + y\sigma \end{matrix}}$$

Grenzen des Konfidenzbereichs

Argument der Verteilung (Quantil) y wird mit $Y_{1-\frac{\alpha}{2}}$ bezeichnet.

Symmetrie: $\boxed{Y_{\frac{\alpha}{2}} = -Y_{1-\frac{\alpha}{2}}}$

Beispiel:

Gemessene Strecke l mit theoretischer Varianz σ^2

gegeben: $l = 72,43m$ mit $\sigma = 0,02m$

gesucht: Konfidenzbereich $\boxed{P(a \leq \mu \leq b) = 1 - \alpha}$ für den Erwartungswert μ

Lösung: Zunächst Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

$$\begin{array}{l} \text{Irrtumswahrscheinlichkeit 5\% } (\alpha = 0,05) : \\ \Phi(y) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \xrightarrow{\text{Tabelle}} y = 1,96 \\ y\sigma = 1,96 \cdot 2cm \Rightarrow \begin{cases} a = l - y\sigma = 72,39m \\ b = l + y\sigma = 72,47m \end{cases} \\ P(72,39m \leq \mu \leq 72,47m) = 0,95 = 95\% \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Irrtumswahrscheinlichkeit 10\% } (\alpha = 0,10) : \\ \Phi(y) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95 \xrightarrow{\text{Tabelle}} y = 1,64 \\ y \cdot \sigma = 1,64 \cdot 2cm \Rightarrow \begin{cases} a = l - y \cdot \sigma = 72,40m \\ b = l + y \cdot \sigma = 72,46m \end{cases} \\ P(72,40m \leq \mu \leq 72,46m) = 0,90 = 90\% \end{array}$$

Zu einem schmalen Konfidenzbereich gehört eine größere Irrtumswahrscheinlichkeit α

\Rightarrow kleinere Sicherheitswahrscheinlichkeit $S = 1 - \alpha$

8.2 Die χ^2 - Verteilung

8.2.1 Definition und Rechenformeln

Gegeben: X_j (stochastisch unabhängige Zufallsgrößen)
 $X_j \sim N(0, 1)$ mit $j=1, 2, \dots, f$ (f standard-normalverteilte Zufallsgrößen)

$$\chi_f^2 = \sum_{j=1}^f X_j^2$$

f - Anzahl der Freiheitsgrade

für die Summe $\sum_{j=1}^f X_j^2$ gilt eine neue, eigenständige Verteilung χ^2 , die für die Berechnung und Definition der Varianz von großer Bedeutung ist.

Dichte der χ^2 - Verteilung

(Ersatz der Zufallsgröße χ^2 durch t aus Gründen der Übersichtlichkeit)

$$f(t) = \begin{cases} \left[2^{\frac{f}{2}} \Gamma\left(\frac{f}{2}\right) \right]^{-1} t^{\frac{f}{2}-1} \exp\left(-\frac{t}{2}\right) & t > 0, \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

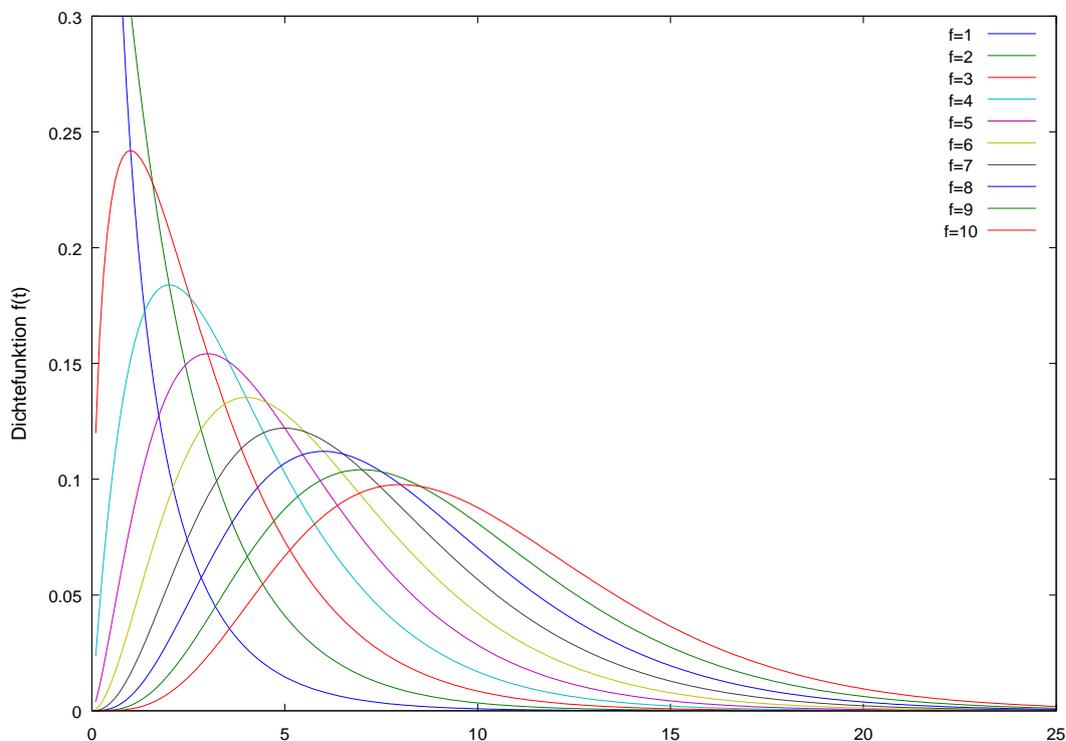
HELMERT 1876 (entdeckt)

PEARSON 1900 (für Statistik)

$$\Gamma\left(\frac{f}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{\frac{f}{2}-1} \exp\left(-\frac{t}{2}\right) dt$$

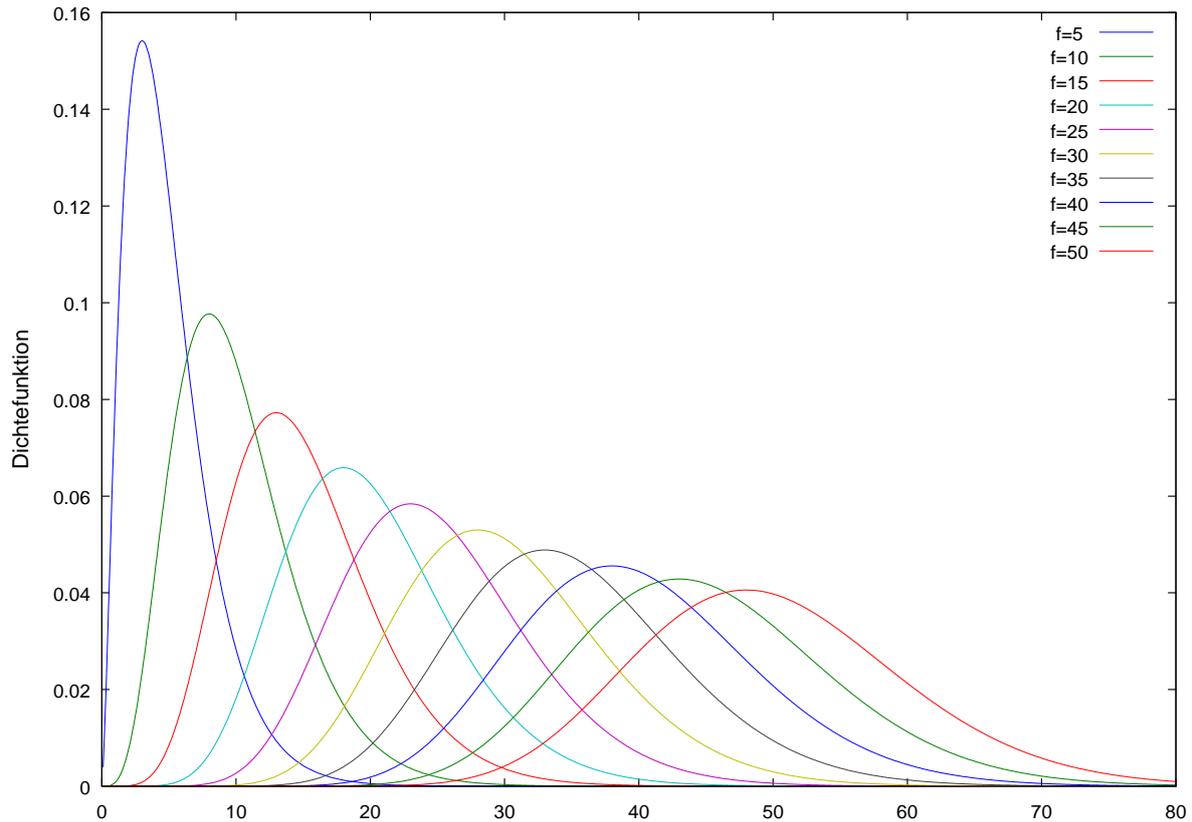
Gammafunktion

Wenige Freiheitsgrade $\Rightarrow f$ klein \Rightarrow stark unsymmetrische Verteilung
 Chi-Quadrat-Verteilung



Viele Überbestimmungen $\Rightarrow f$ groß \Rightarrow Bedingung des zentralen Grenzwertsatzes erfüllt
 \Rightarrow Übergang auf Normalverteilung

Chi-Quadrat-Verteilung



Für $f \geq 30$: $f(t) \approx \varphi(y)$, $y = \frac{t-f}{\sqrt{2f}}$

Dichtefunktion gleicht immer mehr einer

$$\chi_f^2 \sim N(f, 2f)$$

Normalverteilung
mit $\mu=f$ und $\sigma^2=2f$

Für zwei χ^2 -verteilte Zufallsgrößen gilt:

$$\chi_{f_1}^2 = \sum_{i=1}^{f_1} X_i^2$$

$$X_i = N(0, 1) \quad i=1, 2, \dots, f_1$$

$$\chi_{f_2}^2 = \sum_{j=1}^{f_2} X_j^2$$

$$X_j = N(0, 1) \quad j=1, 2, \dots, f_2$$

$$\chi_{f_1}^2 + \chi_{f_2}^2 = \sum_{i=1}^{f_1+f_2} x_i^2 = \chi_{f_1+f_2}^2$$

Additionssatz für zwei χ^2 -verteilte Zufallsgrößen

Verallgemeinerung:

$$\begin{aligned} \chi_f^2 &= \chi_{f_1}^2 + \chi_{f_2}^2 + \dots + \chi_{f_m}^2 \\ f &= f_1 + f_2 + \dots + f_m \end{aligned}$$

Additionssatz für χ^2 -verteilte Zufallsgrößen

8.2.2 Die Verteilung der empirischen Varianz

Empirische Varianz:
$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varepsilon_j^2$$

Man kann eine Verteilungsaussage über ε treffen, wenn wir auf normierte wahre Abweichungen $\bar{\varepsilon}_j$ übergehen

$$\bar{\varepsilon}_j = \frac{\varepsilon_j}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\varepsilon_j^2 = \sigma^2 \bar{\varepsilon}_j^2$$

Empirische Varianz als Summe von n quadrierten, $N(0,1)$ -verteilten Zufallsgrößen $\bar{\varepsilon}_j$

$$s^2 = \frac{\sigma^2}{f} \sum_{j=1}^f \bar{\varepsilon}_j^2 = \frac{\sigma^2}{f} \chi_f^2$$

mit f = Freiheitsgrade (=Anzahl der Überbestimmungen) für ε gilt: $f=n$
für v gilt: $f=n-1$

Allgemeine Beziehung:

$$\chi_f^2 = f \frac{s^2}{\sigma^2}$$

aus zufällige Abweichungen: $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varepsilon_j^2 \quad f = n$

aus Verbesserungen: $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n v_j^2 \quad f = n-1$

8.2.3 Der Konfidenzbereich für die Standardabweichung

Definition: Bereich beziehungsweise Intervall um den numerischen Wert der theoretische Standardabweichung, in dem sich die empirische Standardabweichung mit einer vorgegebenen Sicherheitswahrscheinlichkeit $S = 1 - \alpha$ befindet. Er kann auch ausgehend vom empirischen Wert berechnet werden.

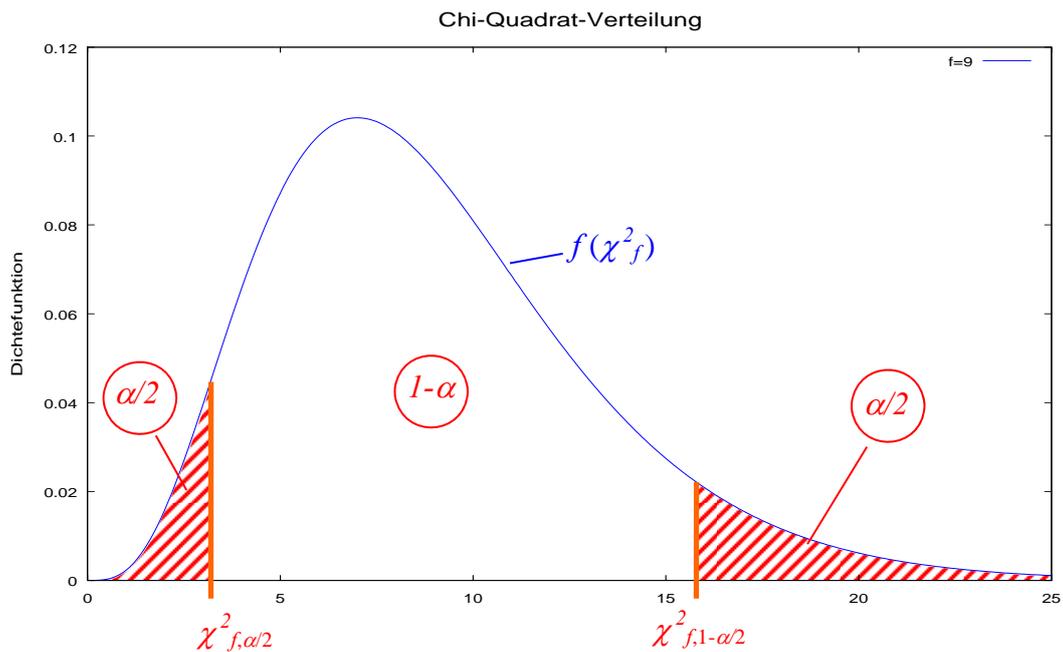
$$P(a \leq \sigma \leq b) = 1 - \alpha$$

$$P(\sigma < a) = P(\sigma > b) = \frac{\alpha}{2}$$

Gegeben: Empirische Standardabweichung s mit Freiheitsgraden f

Gesucht: Grenzen a und b des Konfidenzbereichs

Lösung: über die Beziehung $\chi_f^2 = f \frac{s^2}{\sigma^2}$ zwischen s^2 und χ^2



$$P\left(\chi_{f,\alpha/2}^2 \leq \chi_f^2 \leq \chi_{f,1-\alpha/2}^2\right) = 1 - \alpha$$

$$\chi_f^2 = f \frac{s^2}{\sigma^2}$$

$$\chi_{f,\alpha/2}^2 \leq \chi_f^2 \leq \chi_{f,1-\alpha/2}^2$$

$$\chi_{f,\alpha/2}^2 \leq f \frac{s^2}{\sigma^2} \leq \chi_{f,1-\alpha/2}^2 \quad | \cdot f \cdot s^2$$

$$\frac{\chi_{f,\alpha/2}^2}{f \cdot s^2} \leq \frac{1}{\sigma^2} \leq \frac{\chi_{f,1-\alpha/2}^2}{f \cdot s^2} \quad | \text{ Kehrwert bilden}$$

$$\frac{f \cdot s^2}{\chi_{f,\alpha/2}^2} \geq \sigma^2 \geq \frac{f \cdot s^2}{\chi_{f,1-\alpha/2}^2} \quad | \text{ Umstellen und Wurzel ziehen}$$

$$s \cdot \sqrt{\frac{f}{\chi_{f,1-\alpha/2}^2}} \leq \sigma \leq s \cdot \sqrt{\frac{f}{\chi_{f,\alpha/2}^2}}$$

| **Konfidenzbereich**

$$a = s \cdot \sqrt{\frac{f}{\chi_{f,1-\alpha/2}^2}}$$

untere Grenze

$$b = s \cdot \sqrt{\frac{f}{\chi_{f,\alpha/2}^2}}$$

obere Grenze

Beispiel:

Standardabweichung s aus Verbesserungen

gegeben: $s = 15,1\text{mm}$ mit $n = 8$

gesucht: Konfidenzbereich $P(a \leq \sigma \leq b) = 1 - \alpha$ für die theoretische Varianz σ^2

Lösung: Zunächst Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

Irrtumswahrscheinlichkeit 5% ($\alpha = 0,05$):

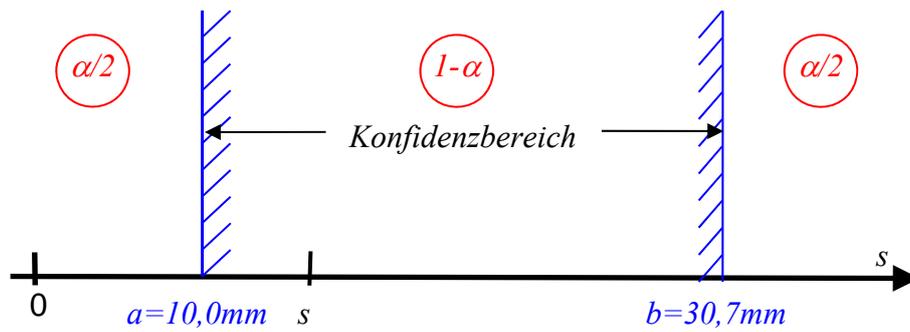
$s = 15,1\text{mm}$

$n = 8 \Rightarrow f = n - 1 = 7 \xrightarrow{\text{Tabelle}} \begin{cases} \chi_{f,\alpha/2}^2 = \chi_{7,0.025}^2 = 1,690 \\ \chi_{f,1-\alpha/2}^2 = \chi_{7,0.975}^2 = 16,013 \end{cases}$

\Rightarrow Grenzen : $\begin{cases} a = 15,1 \text{ mm} \cdot \sqrt{\frac{7}{16,013}} = \underline{\underline{10,0 \text{ mm}}} \\ b = 15,1 \text{ mm} \cdot \sqrt{\frac{7}{1,690}} = \underline{\underline{30,7 \text{ mm}}} \end{cases}$

$P(10,0\text{mm} \leq \sigma \leq 30,7\text{mm}) = 0,95 = 95\%$

\Rightarrow stark unsymmetrischer Konfidenzbereich (siehe Zeichnung)



Die starke Unsymmetrie belegt, dass $E(s^2) = \sigma^2$ aber $E(s) \neq \sigma$ gilt.

Im Allgemeinen werden die empirischen Standardabweichungen zu optimistisch abgeschätzt ($E(s) < \sigma$); insbesondere bei kleinen f !

8.3 Die t-Verteilung

8.3.1 Definition

Die t -Verteilung wurde 1908 von GOSSET (Pseudonym „Student“; daher auch Student-Verteilung) hergeleitet.

Ausgangspunkt ist die Realisierung l einer beliebigen $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilten Zufallsgröße L . Diese wird auf die Standardisierte Normalverteilung mit $N(0,1)$ transformiert.

$$\text{Ausgangspunkt: } \begin{cases} l \sim N(\mu, \sigma^2) \\ \bar{\varepsilon} = \frac{l - \mu}{\sigma} = \frac{\varepsilon}{\sigma} \\ \bar{\varepsilon} \sim N(0,1) \end{cases}$$

Die theoretische Standardabweichung σ ist gewöhnlich nicht bekannt und wird daher ersetzt durch die empirische Standardabweichung s .

$$t_f = \frac{l - \mu}{s} = \frac{\varepsilon}{s} \sim t_f$$

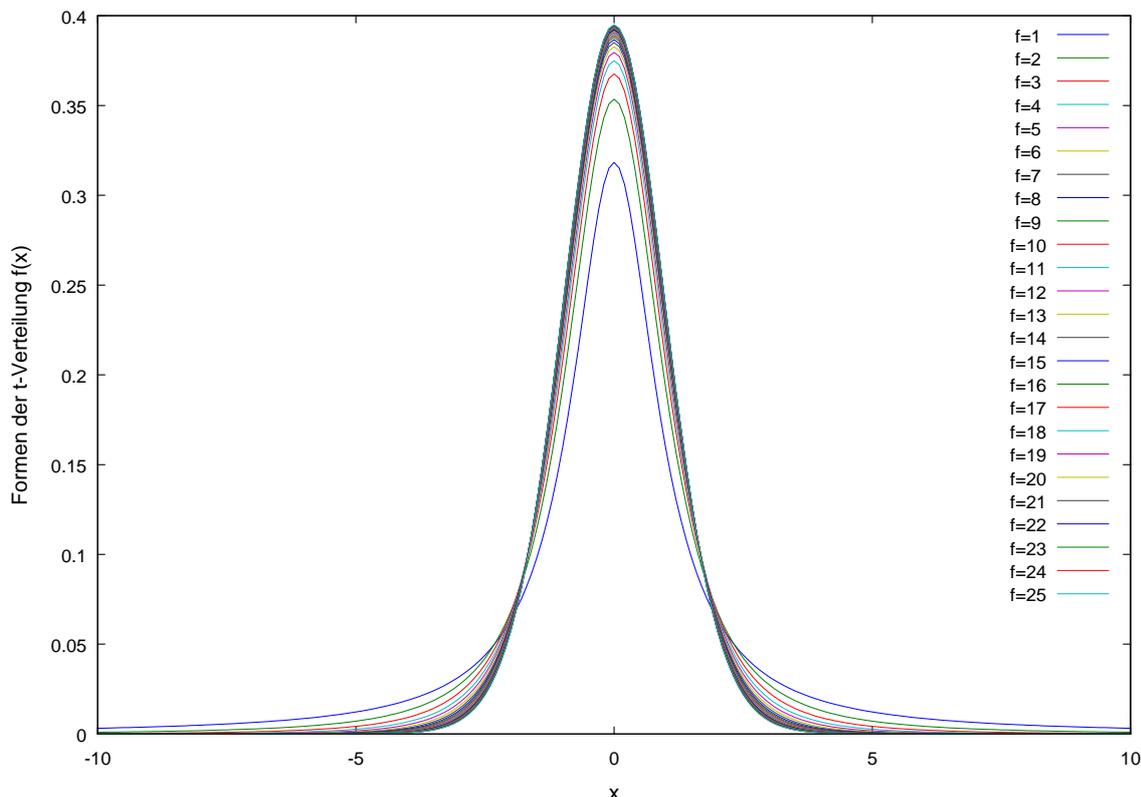
t -Verteilung

f Anzahl der Freiheitsgrade bei der Bestimmung von s

Grenzfall: $f \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} s^2 \rightarrow \sigma^2 \\ t_f \Rightarrow \bar{\varepsilon} \end{cases} \Rightarrow t\text{-Verteilung} \rightarrow N(0,1)$

für unendlich viele Freiheitsgrade geht die t -Verteilung in die Standardnormalverteilung über.

Student- bzw. t -Verteilung

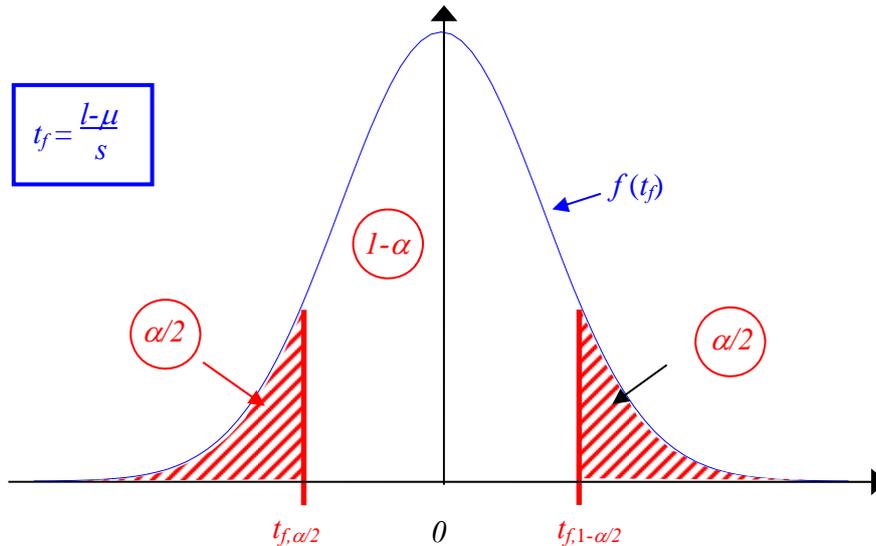


8.3.2 Der Konfidenzbereich für den Erwartungswert μ

Gegeben: $L \sim N(\mu, \sigma^2)$ normalverteilt
 σ^2 theoretische Varianz, unbekannt
 μ Erwartungswert, unbekannt
 s empirische Varianz, bekannt

Definition: $P(a \leq \mu \leq b) = 1 - \alpha$
 $P(\mu < a) = P(\mu > b) = \frac{\alpha}{2}$ Konfidenzbereich für μ

Gesucht: a, b Grenzen des Konfidenzbereichs



Lösung: $P(t_{f, \alpha/2} \leq t_f \leq t_{f, 1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$ | Ausgangsbeziehung

$t_{f, \alpha/2} = -t_{f, 1-\alpha/2}$ | symmetrische Verteilung

$P(-t_{f, 1-\alpha/2} \leq t_f \leq t_{f, 1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$ | $t_f = \frac{l - \mu}{s}$ einsetzen

$P(-t_{f, 1-\alpha/2} \leq \frac{l - \mu}{s} \leq t_{f, 1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$ | $\cdot s$

$P(-t_{f, 1-\alpha/2} \cdot s \leq l - \mu \leq t_{f, 1-\alpha/2} \cdot s) = 1 - \alpha$ | $-l$

$P(-l - t_{f, 1-\alpha/2} \cdot s \leq -\mu \leq -l + t_{f, 1-\alpha/2} \cdot s) = 1 - \alpha$ | $\cdot (-1)$

$P(+l + t_{f, 1-\alpha/2} \cdot s \geq \mu \geq l - t_{f, 1-\alpha/2} \cdot s) = 1 - \alpha$ | umstellen

$P(l - t_{f, 1-\alpha/2} \cdot s \leq \mu \leq l + t_{f, 1-\alpha/2} \cdot s) = 1 - \alpha$ **Konfidenzbereich**

$a = l - t_{f, 1-\alpha/2} \cdot s$ **untere Grenze**

$b = l + t_{f, 1-\alpha/2} \cdot s$ **obere Grenze**

Beispiel:

Gemessene Strecke l mit empirischer Varianz s^2

gegeben: $l = 72,430m$ mit $s = 0,025m$ und $f = 7$

gesucht: Konfidenzbereich $P(a \leq \mu \leq b) = 1 - \alpha$ für den Erwartungswert μ

Lösung: Zunächst Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

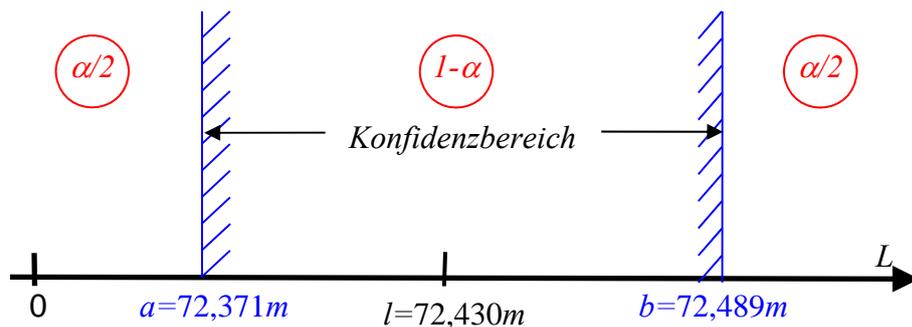
Irrtumswahrscheinlichkeit α wird idR. zu $\alpha=0,05$ (5%) oder $\alpha=0,01$ (1%) gesetzt

Irrtumswahrscheinlichkeit 5% ($\alpha = 0,05$):

Tabelle $\rightarrow t_{f,1-\alpha/2} = t_{7,0,975} = 2,37$

$$t_{7,0,975} \cdot s = 2,37 \cdot 25mm = 59,25mm \Rightarrow \begin{cases} a = l - t_{f,1-\alpha/2} \cdot s = 72,371m \\ b = l + t_{f,1-\alpha/2} \cdot s = 72,489m \end{cases}$$

$P(72,371m \leq \mu \leq 72,489m) = 0,95 = 95\%$



8.4 Die F-Verteilung

8.4.1 Definition

Die F -Verteilung wurde 1924 von FISHER hergeleitet.

Gegeben: x_i^2 und y_j^2 zwei stochastisch unabhängige, χ^2 -verteilte Zufallsgrößen

$$\left. \begin{aligned} \chi_{f_1}^2 &= \sum_{i=1}^{f_1} x_i^2 \\ \chi_{f_2}^2 &= \sum_{j=1}^{f_2} y_j^2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} x_i, y_j \sim N(0,1) \\ \text{normalverteilt} \end{array} \quad \begin{array}{l} E(x_i, y_j) = 0 \\ \text{unabhängig} \end{array}$$

f - Anzahl der Freiheitsgrade

Definition: $F_{f_1, f_2} = \frac{\chi_{f_1}^2}{f_1} : \frac{\chi_{f_2}^2}{f_2} = \frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{\chi_{f_1}^2}{\chi_{f_2}^2}$ **F-Verteilung**

Tabelle: Nur einseitige Quantile

8.4.2 Konfidenzbereich für den Varianzenquotienten

Gegeben: $\chi_{f_i}^2 = f_i \cdot \frac{s_i^2}{\sigma_i^2}$ | für $i = 1, 2$

$\chi_{f_i}^2 = f_i \frac{s_i^2}{\sigma_i^2}$ | für $i = 1, 2$ (aus 8.2.2)

$\frac{\chi_{f_1}^2}{\chi_{f_2}^2} = \frac{f_1 \frac{s_1^2}{\sigma_1^2}}{f_2 \frac{s_2^2}{\sigma_2^2}}$ | Quotient

$F_{f_1, f_2} = \frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{\chi_{f_1}^2}{\chi_{f_2}^2}$ | Definition

$F_{f_1, f_2} = \frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{f_1 \cdot s_1^2 \cdot \sigma_2^2}{\sigma_1^2 \cdot f_2 \cdot s_2^2}$ | Einsetzen und Kürzen

$F_{f_1, f_2} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \cdot \frac{s_1^2}{s_2^2}$ | Ergebnis

$$q^2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$$

Einführung: Varianzenquotient

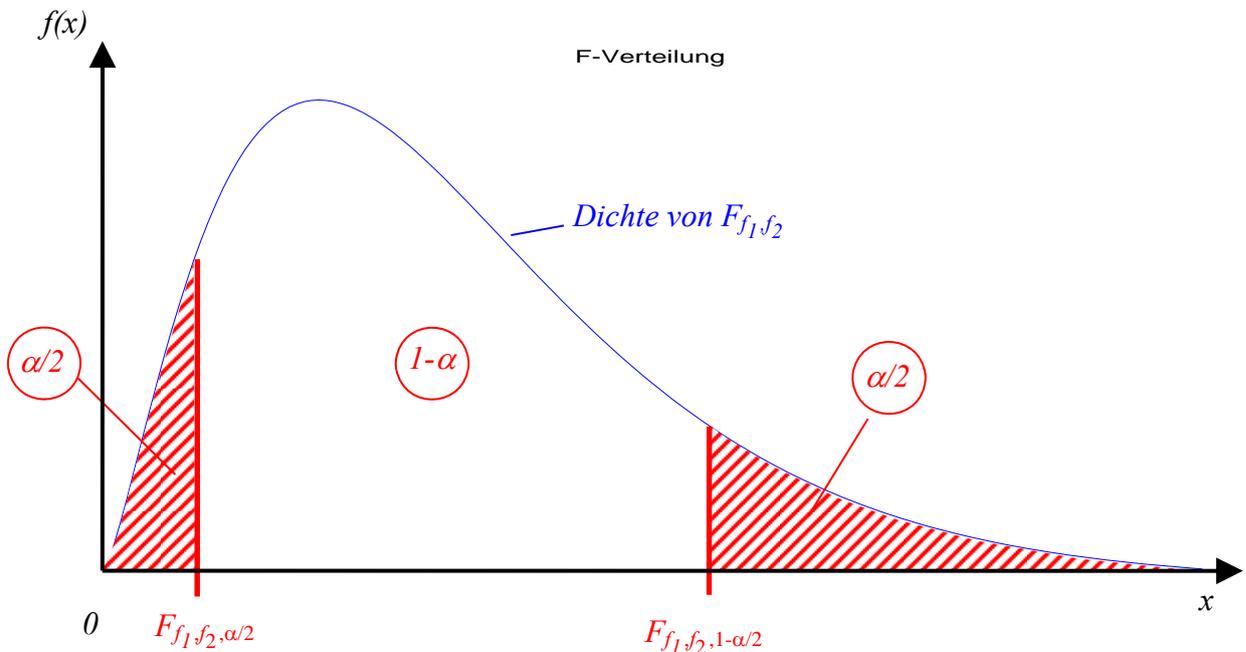
$$F_{f_1, f_2} = \frac{1}{q^2} \cdot \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

Schreibweise mit Varianzenquotient

$$q^2 = 1 \Rightarrow F_{f_1, f_2} = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

Wichtigster Sonderfall $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

(Messreihen gleicher Genauigkeit!)



Definition:

$$P(a \leq q \leq b) = 1 - \alpha$$

Konfidenzbereich für $q = \sigma_1/\sigma_2$

Gesucht:

a, b

Grenzen des Konfidenzbereichs

Lösung:

$$P\left(F_{f_1, f_2, \alpha/2} \leq F_{f_1, f_2} \leq F_{f_1, f_2, 1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

| Ausgangsbeziehung

$$P\left(F_{f_1, f_2, \alpha/2} \leq \frac{1}{q^2} \cdot \frac{s_1^2}{s_2^2} \leq F_{f_1, f_2, 1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

Umformen der Ungleichung:

$$F_{f_1, f_2, \alpha/2} \leq \frac{1}{q^2} \cdot \frac{s_1^2}{s_2^2} \leq F_{f_1, f_2, 1-\alpha/2} \quad | \cdot \frac{s_2^2}{s_1^2}$$

$$\frac{s_2^2}{s_1^2} \cdot F_{f_1, f_2, \alpha/2} \leq \frac{1}{q^2} \leq \frac{s_2^2}{s_1^2} \cdot F_{f_1, f_2, 1-\alpha/2} \quad | \text{ Kehrwert bilden}$$

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{1}{F_{f_1, f_2, \alpha/2}} \geq q^2 \geq \frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{1}{F_{f_1, f_2, 1-\alpha/2}} \quad | \text{ Umstellen und Wurzel ziehen}$$

$$\frac{s_1}{s_2} \cdot \sqrt{\frac{1}{F_{f_1, f_2, 1-\alpha/2}}} \leq q \leq \frac{s_1}{s_2} \cdot \sqrt{\frac{1}{F_{f_1, f_2, \alpha/2}}}$$

Konfidenzbereich für $q = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$

$F_{f_1, f_2, \alpha/2}$ ist nicht tabelliert!

Tabelle:

Enthält nur einseitige Quantile

$$\left. \begin{aligned} F_{f_1, f_2} &= \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \cdot \frac{s_1^2}{s_2^2} \\ F_{f_2, f_1} &= \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \cdot \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{1}{F_{f_1, f_2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{F_{f_1, f_2, \alpha/2}} = F_{f_2, f_1, 1-\alpha/2}$$

$$P(F_{f_1, f_2} \leq F_{f_1, f_2, 1-\alpha}) = 1 - \alpha$$

$F_{f_2, f_1, 1-\alpha}$ ist tabelliert!

$\Rightarrow \alpha$ geschickt wählen

$$\frac{s_1}{s_2} \cdot \sqrt{\frac{1}{F_{f_1, f_2, 1-\alpha/2}}} \leq q \leq \frac{s_1}{s_2} \cdot \sqrt{F_{f_2, f_1, 1-\alpha/2}}$$

Konfidenzbereich für $q = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$

$$a = \frac{s_1}{s_2} \cdot \sqrt{\frac{1}{F_{f_1, f_2, 1-\alpha/2}}}$$

untere Grenze

$$b = \frac{s_1}{s_2} \cdot \sqrt{F_{f_2, f_1, 1-\alpha/2}}$$

obere Grenze

Beispiel:

Messung eines Winkels durch zwei Messgruppen und Frage, ob die gleiche theoretische Genauigkeit σ_1 und σ_2 erreicht wurde.

gegeben: ① $s_1 = 0,47 \text{ mgon}$, $n_1 = 16 \Rightarrow f_1 = n_1 - 1 = 15$

② $s_2 = 0,69 \text{ mgon}$, $n_2 = 7 \Rightarrow f_2 = n_2 - 1 = 6$

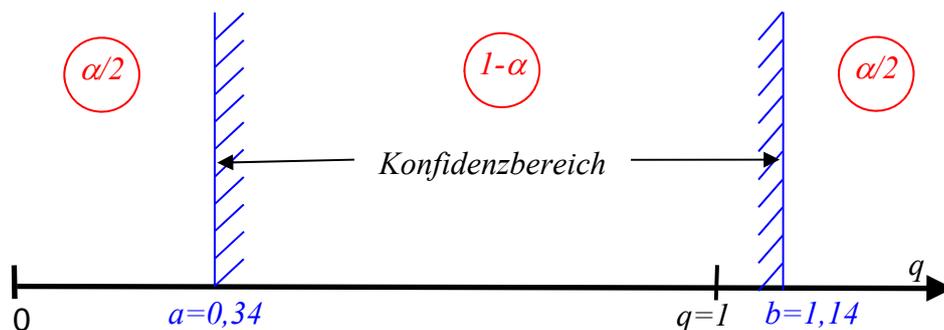
s_1 und s_2 sind empirische Standardabweichungen der Einzelmessungen

Frage: „Entstammen“ die Messreihen derselben Grundgesamtheit?
Sind $E(s_1)$ und $E(s_2)$ bzw. σ_1 und σ_2 als gleich genau anzusehen?

Lösung: Zunächst Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

Irrtumswahrscheinlichkeit α wird idR. zu $\alpha=0,05$ (5%) oder $\alpha=0,01$ (1%) gesetzt, kann aber prinzipiell frei gewählt werden.

Irrtumswahrscheinlichkeit 10% ($\alpha = 0,10$):	
Tabelle →	$\begin{cases} F_{f_1, f_2, 1-\alpha/2} = F_{15, 6, 0,95} = 3,9 \\ F_{f_2, f_1, 1-\alpha/2} = F_{6, 15, 0,95} = 2,8 \end{cases}$
Grenzen:	$\begin{cases} a = \frac{s_1}{s_2} \cdot \sqrt{\frac{1}{F_{f_1, f_2, 1-\alpha/2}}} = \frac{0,47}{0,69} \cdot \sqrt{\frac{1}{3,9}} = 0,34 \\ b = \frac{s_1}{s_2} \cdot \sqrt{F_{f_2, f_1, 1-\alpha/2}} = \frac{0,47}{0,69} \cdot \sqrt{2,8} = 1,14 \end{cases}$
Bereich:	$P(0,34 \leq \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \leq 1,14) = 0,90 = 90\%$



$\Rightarrow q = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1$ liegt im Intervall!

$\Rightarrow E(s_1) = E(s_2)$ bzw. $\sigma_1 = \sigma_2$

\Rightarrow gleiche Genauigkeit ist durchaus möglich (darf angenommen werden)!

\Rightarrow der numerische Unterschied zwischen s_1 und s_2 ist rein zufällig (Ursache sind zufällige Abweichungen)

Irrtumswahrscheinlichkeit 5% ($\alpha = 0,05$):	
Tabelle →	$\begin{cases} F_{f_1, f_2, 1-\alpha/2} = F_{15, 6, 0,975} = 5,27 \\ F_{f_2, f_1, 1-\alpha/2} = F_{6, 15, 0,975} = 3,42 \end{cases}$
Grenzen:	$\begin{cases} a = \frac{s_1}{s_2} \cdot \sqrt{\frac{1}{F_{f_1, f_2, 1-\alpha/2}}} = \frac{0,47}{0,69} \cdot \sqrt{\frac{1}{5,27}} = 0,30 \\ b = \frac{s_1}{s_2} \cdot \sqrt{F_{f_2, f_1, 1-\alpha/2}} = \frac{0,47}{0,69} \cdot \sqrt{3,42} = 1,26 \end{cases}$
Bereich:	$P(0,30 \leq \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \leq 1,26) = 0,95 = 95\%$

8.4.3 Beziehungen der F-Verteilung zu anderen Verteilungen

a) Beziehung zur χ^2 -Verteilung

$$F_{f_1, f_2} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \cdot \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad | \quad \text{Definition der } F\text{-Verteilung}$$

$$\text{wenn } f_2 = \infty, \text{ dann wird } s_2^2 = \sigma_2^2 \quad | \quad \frac{\sigma_2^2}{s_2^2} = 1$$

$$\text{zusammen mit } f_1=f \text{ und } s_1=s \text{ sowie } \sigma_1=\sigma \text{ wird } F_{f, \infty} = \frac{s^2}{\sigma^2}.$$

$$\text{aus 6.2.2 ist bekannt } \chi_f^2 = f \cdot \frac{s^2}{\sigma^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\chi_f^2 = f \cdot F_{f, \infty}}$$

b) Beziehung zur t -Verteilung

$$F_{f_1, f_2} = \frac{s_1^2}{\sigma_1^2} : \frac{s_2^2}{\sigma_2^2} = \frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{\chi_{f_1}^2}{\chi_{f_2}^2} \quad | \quad \text{Definition der } F\text{-Verteilung}$$

$$\text{wenn } \left. \begin{matrix} f_1 = 1 \\ f_2 = f \end{matrix} \right\} \Rightarrow F_{1, f} = f \cdot \frac{\chi_1^2}{\chi_f^2} \quad \text{und} \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$$

$$\chi_1^2 = \bar{\varepsilon}^2 = \frac{\varepsilon^2}{\sigma^2} = \frac{(l - \mu)^2}{\sigma^2}$$

$$\chi_f^2 = f \cdot \frac{s^2}{\sigma^2}$$

$$F_{1,f} = f \cdot \frac{\varepsilon^2}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{f} \cdot \frac{\sigma^2}{s^2}$$

$$F_{1,f} = \frac{\varepsilon^2}{s^2} \quad \left| \quad \frac{\varepsilon}{s} = t_f \right.$$

$$F_{1,f} = t_f^2$$

$$\Rightarrow \boxed{t_f = \sqrt{F_{1,f}}}$$

c) Beziehung zur Normalverteilung

$$f \rightarrow \infty \quad \left| \quad t_\infty = Y \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{t_\infty = \sqrt{F_{1,\infty}} \sim N(0,1)}$$

Beispielhafter Tabellenvergleich:

a) zur χ^2 -Verteilung

$$F_{4,\infty,0.95} = 2,372 \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Vergleichswert aus Tabelle} \\ f=4 \text{ und } \alpha=0,05 \text{ (einseitiges Quantil)} \end{array} \right.$$

$$f \cdot F_{4,\infty,0.95} = 4 \cdot F_{4,\infty,0.95} = 9,488$$

$$\Rightarrow \chi_{4,0.95}^2 = 9,488$$

b) zur t -Verteilung

$$F_{1,4,0.95} = 7,709 \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Vergleichswert aus Tabelle} \\ f_1=1, f_2=4, \alpha=0,05 \text{ (einseitiges Quantil)} \end{array} \right.$$

$$\sqrt{F_{1,4,0.95}} = 2,78$$

$$\Rightarrow t_{4,0.975} = 2,78 \quad \left| \quad f=4 \text{ und } \alpha=0,05 \text{ (zweiseitiges Quantil)} \right.$$

c) zur Standardnormalverteilung

$$F_{1,\infty,0.95} = 3.841 \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Vergleichswert aus Tabelle} \\ f_1=1, f_2=\infty, \alpha=0,05 \text{ (einseitiges Quantil)} \end{array} \right.$$

$$\sqrt{F_{1,\infty,0.95}} = 1.96$$

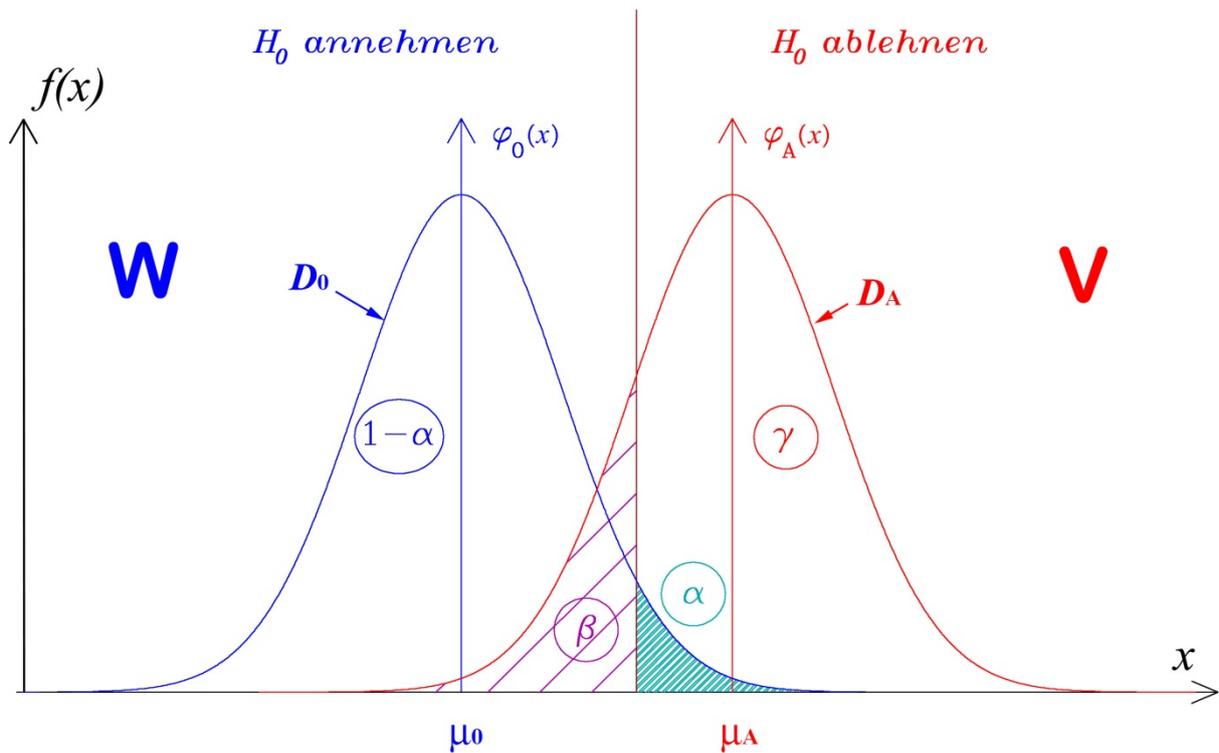
$$\Rightarrow y_{0.975} = t_{\infty,0.975} = 1.96 \quad \left| \quad f=\infty \text{ und } \alpha=0,05 \text{ (zweiseitiges Quantil)} \right.$$

9 Der statistische Test

9.1 Grundzüge der Testtheorie, Fehlschlüsse 1. und 2. Art

Gegeben: L Zufallsgröße
 l Realisierung
 D_i Distribution (wohldefinierte, beliebige (Normal-)Verteilungen in der Form $D_0(\mu_0, \sigma_0^2)$ oder $D_A(\mu_A, \sigma_A^2)$)

Hypothesen: Nullhypothese: $H_0 : L \sim D_0(\mu_0, \sigma_0^2)$
 Alternativhypothese: $H_A : L \sim D_A(\mu_A, \sigma_A^2)$



$f(x)$ Dichtefunktion der Verteilungen D_0 bzw. D_A
W Annahmehbereich für H_0 (H_0 wird als „wahr“ angenommen)
V Verwerfungsbereich für H_0 bzw. Annahmehbereich für H_A

Test: $l \in \mathbf{W}$: H_0 annehmen bzw. nicht verwerfen
 $l \in \mathbf{V}$: H_0 verwerfen und stattdessen H_A annehmen

$(L \in \mathbf{W} \mid H_0) = 1-\alpha = S$	Sicherheitswahrscheinlichkeit S , Signifikanzniveau $1-\alpha$	(wahr)
$(L \in \mathbf{V} \mid H_0) = \alpha$	Irrtumswahrscheinlichkeit α (Wahrscheinlichkeit für einen „Fehlschluss 1. Art“)	(falsch)
$(L \in \mathbf{V} \mid H_A) = \gamma$	Testgüte $\gamma = 1-\beta$	(wahr)
$(L \in \mathbf{W} \mid H_A) = \beta$	Wahrscheinlichkeit β für einen „Fehlschluss 2. Art“)	(falsch)
<p>„Fehlschluss 1. Art“: H_0 wird verworfen, obwohl H_0 richtig ist \Rightarrow falscher Alarm! „peinlich“</p> <p>„Fehlschluss 2. Art“: H_0 wird nicht verworfen, obwohl H_0 falsch ist und stattdessen H_A richtig wäre \Rightarrow verschlafener Alarm! sehr gefährlich !!!</p>		

Übersicht zu Wahl der richtigen Verteilung

	theoretisch μ bekannt ($\sigma, f=\infty$)	empirisch μ unbekannt ($s, f=n-u$) ($\sigma, f=n$)
Skalare Größen, nicht quadratisch (z.B. Mittelwerte, Differenzen)	$Y_{1-\alpha}$ $Y_{1-\alpha/2}$	$t_{f,1-\alpha}$ $t_{f,1-\alpha/2}$
quadratische Größen (z.B. Varianzen und Vektoren)	$\chi^2_{1-\alpha}$ $\chi^2_{1-\alpha/2}$	$F_{f_1, f_2, 1-\alpha}$ $F_{f_1, f_2, 1-\alpha/2}$

9.2 Signifikanztest für die Differenz zweier Zufallsgrößen (Normalverteilung)

9.2.1 Ein- oder zweiseitige Fragestellung

Gegeben: $L_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ normalverteilte Zufallsgröße mit ihrer Realisierung l_1
 $L_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ normalverteilte Zufallsgröße mit ihrer Realisierung l_2

Nullhypothese:

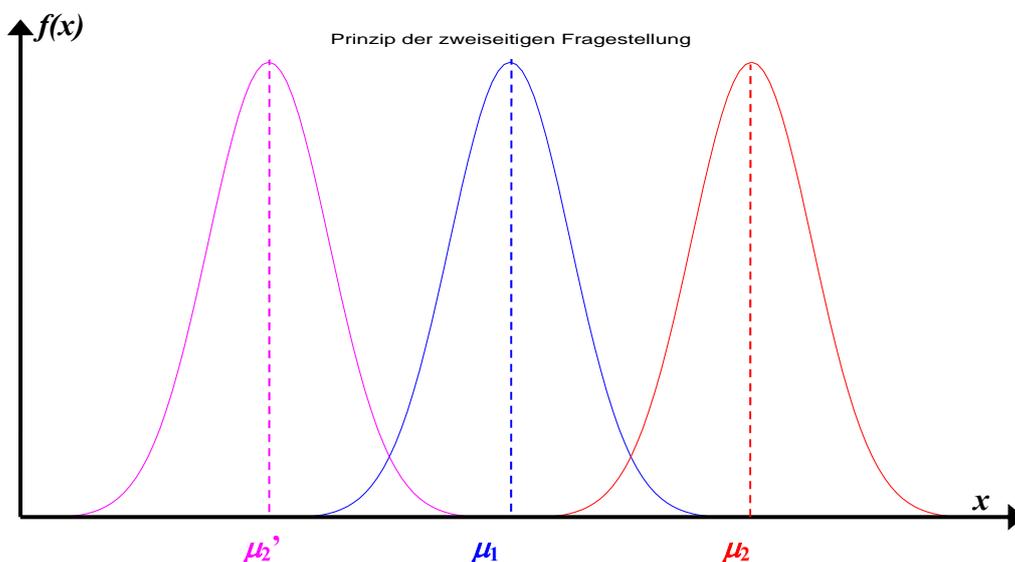
$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

Alternativhypothesen:

$$H_{A1} : \mu_2 > \mu_1$$

$$H_{A2} : \mu_1 \neq \mu_2$$

mit H_{A1} einseitiger oder H_{A2} zweiseitiger Fragestellung



Andere Schreibweise mit der Differenz der beiden Größen:

Definition: $D = L_2 - L_1$ normalverteilte Zufallsgröße mit ihrer Realisierung $d = l_2 - l_1$

$$E(D) = E(L_2) - E(L_1) = \mu_2 - \mu_1 = \mu_D \quad \text{Erwartungswert der Differenz}$$

Nullhypothese:

$$H_0 : d = E(d)$$

Alternativhypothesen:

$$H_{A1} : d > E(d)$$

$$H_{A2} : d \neq E(d)$$

mit H_{A1} einseitiger oder H_{A2} zweiseitiger Fragestellung

In der Regel ist interessant, ob die Erwartungswerte identisch sind ($\mu_1 = \mu_2$). Das ist genau dann der Fall, wenn $E(d) = 0$ ist. Also kann „gegen Null“ getestet werden::

Nullhypothese:

$$H_0 : E(d) = 0$$

Alternativhypothesen:

$$H_{A1} : E(d) > 0$$

$$H_{A2} : E(d) \neq 0$$

mit H_{A1} einseitiger oder H_{A2} zweiseitiger Fragestellung

9.2.2 Signifikanztest für die Differenz zweier Mittelwerte bei bekannten theoretischen Standardabweichungen σ_1 und σ_2

Gegeben: $D = L_2 - L_1$ Zufallsgröße (normalverteilt) ist die Differenz
 $d = l_2 - l_1$ Realisierung der Differenz
 $\sigma_D^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ Varianz der Differenz (σ_1 und σ_2 sind unkorreliert)

Testgröße: $y = \frac{d}{\sigma_d}$ „Wert durch Standardabweichung“

Hypothesen: $H_0 : E(d) = 0$
 $H_0 : E(Y) = 0 \Rightarrow y \sim N(0,1)$

$H_A : E(d) = \mu_d$
 $H_A : E(Y) = \frac{\mu_d}{\sigma_d} = \tilde{y} \Rightarrow y \sim N(\tilde{y}, 1)$
 $\tilde{y} = \frac{\tilde{d}}{\sigma_d} = \delta_j$ Nichtzentralitätsparameter

Einseitige Fragestellung

Quantil: $y_{1-\alpha}$ aus Tabelle

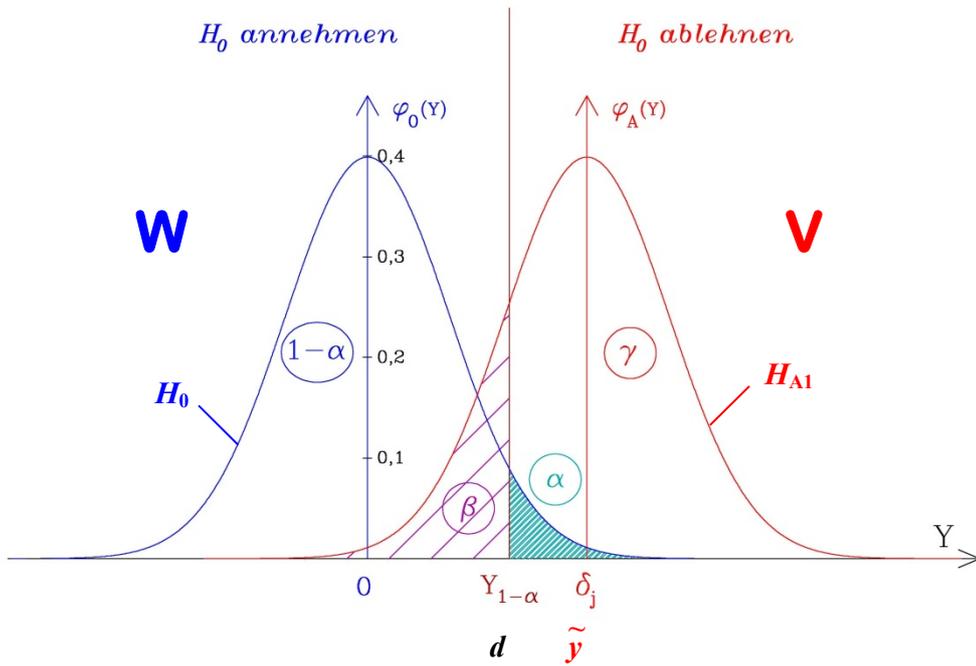
Entscheidung: $y \leq y_{1-\alpha} \Rightarrow H_0$ nicht verwerfen
 $y > y_{1-\alpha} \Rightarrow H_0$ verwerfen

$P(y > y_{1-\alpha} | H_0) = \alpha$ Irrtumswahrscheinlichkeit α
 $\alpha = 0,05$ (Signifikanz)
 $\alpha = 0,01$ (Hochsignifikanz)

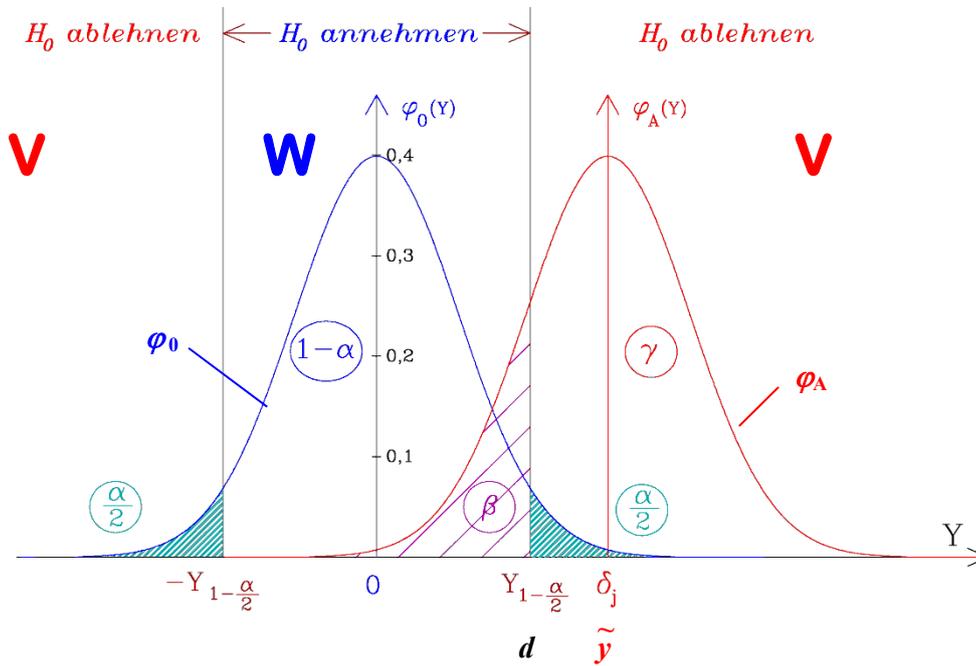
$P(y > y_{1-\alpha} | H_A) = \gamma$ Testgüte $\gamma = 1 - \beta = 1 - \Phi(y_{1-\alpha} - \tilde{y})$
 Verteilungsfunktion Φ von y

Anwendung: Fall a): \tilde{d} gegeben und γ gesucht
 Fall b): γ vorgegeben (oft $\gamma = 80\%$) und \tilde{d} gesucht

Einseitige Fragestellung



Zweiseitige Fragestellung



$S = (1-\alpha)$:

Sicherheitswahrscheinlichkeit

$\gamma = (1-\beta)$:

Testgüte

α :

Irrtumswahrscheinlichkeit für Fehlschluß 1. Art „falscher Alarm“

β :

Wahrscheinlichkeit für Fehlschluß 2. Art „verschlafener Alarm“

Zweiseitige Fragestellung

Quantil:

$$y_{1-\alpha/2} = -y_{\alpha/2} \text{ aus Tabelle}$$

Entscheidung:

$$\begin{aligned} |y| \leq y_{1-\alpha/2} &\Rightarrow H_0 \text{ nicht verwerfen} \\ |y| > y_{1-\alpha/2} &\Rightarrow H_0 \text{ verwerfen} \end{aligned}$$

$$P\left(|y| > y_{1-\alpha/2} \mid H_0\right) = \alpha \quad \text{Irrtumswahrscheinlichkeit } \alpha$$

$$\alpha = 0,05 \quad (\text{Signifikanz})$$

$$\alpha = 0,01 \quad (\text{Hochsignifikanz})$$

$$P\left(|y| > y_{1-\alpha/2} \mid H_A\right) = \gamma$$

Testgüte

$$\gamma = 1 - \beta = 1 - \left[\Phi\left(y_{1-\alpha/2} - \tilde{y}\right) - \Phi\left(y_{\alpha/2} - \tilde{y}\right) \right]$$

$$\text{mit } y_{\alpha/2} = -y_{1-\alpha/2}$$

$$\gamma = 1 - \beta = 1 - \left[\Phi\left(y_{1-\alpha/2} - \tilde{y}\right) - \Phi\left(-y_{1-\alpha/2} - \tilde{y}\right) \right]$$

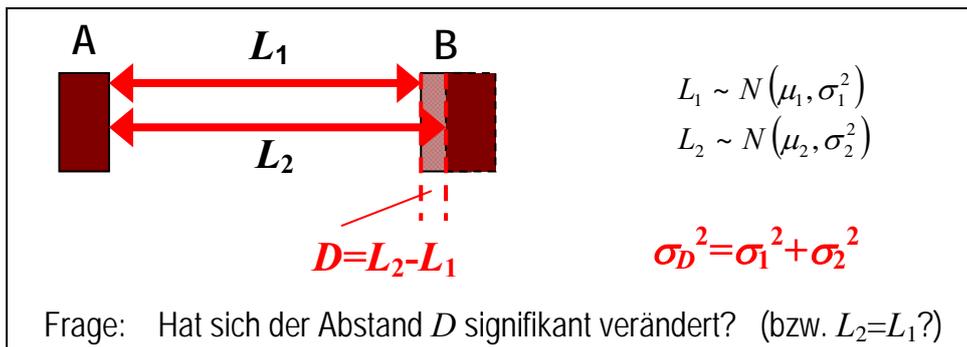
Verteilungsfunktion Φ von y

Anwendung: Fall a): \tilde{d} gegeben und γ gesucht
 Fall b): γ vorgegeben (oft $\gamma = 80\%$) und \tilde{d} gesucht

9.2.3 Signifikanztest für die Differenz zweier Mittelwerte bei unbekanntem theoretischen Standardabweichungen σ_1 und σ_2

Gegeben: L_1 und L_2 Zwei Zufallsgrößen (normalverteilt)

$$\mathbf{l}_1 = \begin{bmatrix} l'_1 \\ l'_2 \\ \vdots \\ l'_{n_1} \end{bmatrix}; \mathbf{l}_2 = \begin{bmatrix} l''_1 \\ l''_2 \\ \vdots \\ l''_{n_2} \end{bmatrix} \quad \text{Realisierungen (Messreihen, Beobachtungsvektoren)}$$



$D = L_2 - L_1$ Differenz ist eine normalverteilte Zufallsgröße
 $d = \bar{l}_2 - \bar{l}_1$ Realisierung der Differenz
 σ_D^2, s_1^2, s_2^2 Varianzen (noch zu bestimmen bzw. zu prüfen)

$$E(D) = \tilde{d} = E(L_2) - E(L_1) = \mu_2 - \mu_1 = \mu_d$$

$$D \sim N(\mu_d, \sigma_d^2)$$

Nullhypothese: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $H_0 : E(d) = 0$

Alternativhypothesen: $H_{A1} : \mu_1 < \mu_2$ $H_{A1} : E(d) > 0$ einseitige Fragestellung
 $H_{A2} : \mu_1 \neq \mu_2$ $H_{A2} : E(d) \neq 0$ zweiseitige Fragestellung

Hier wird eine Fallunterscheidung notwendig werden, ob die beiden Messreihen l_1 und l_2 gleiche Genauigkeit besitzen oder nicht bzw. ob $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (Frage, ob l_1 und l_2 derselben Grundgesamtheit entstammen oder nicht).

Zunächst einmal werden in a) die empirischen Mittelwerte und in b) die empirischen Standardabweichungen für l_1 und l_2 berechnet. Bei der Berechnung der Standardabweichung der Differenz erfolgt die Fallunterscheidung in c).

a) Berechnung der empirischen Mittelwerte

$$\textcircled{1} \quad \bar{l}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} l'_i = \frac{1}{n_1} \cdot \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{l}_1$$

$$\bar{l}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} l''_j = \frac{1}{n_2} \cdot \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{l}_2$$

Mittelwerte

$$\textcircled{2} \quad d = \bar{l}_2 - \bar{l}_1$$

empirische Differenz

b) Berechnung der empirischen Standardabweichung der Mittelwerte

$$v_{1,i} = \bar{l}_1 - l'_i \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, n_1$$

$$v_{2,j} = \bar{l}_2 - l''_j \quad \text{mit } j = 1, 2, \dots, n_2$$

Verbesserungen

$$\textcircled{3} \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{e} \cdot \bar{l}_1 - \mathbf{l}_1$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{e} \cdot \bar{l}_2 - \mathbf{l}_2$$

Vektoren der Verbesserungen

$$\textcircled{4} \quad s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} v_{1i}^2 = \frac{1}{f_1} \cdot \mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_1$$

$$s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{j=1}^{n_2} v_{2j}^2 = \frac{1}{f_2} \cdot \mathbf{v}_2^T \cdot \mathbf{v}_2$$

Varianzen der Einzelwerte

$f_1 = n_1 - 1$ $f_2 = n_2 - 1$ Freiheitsgrade der Messreihen l_1 und l_2

$$\textcircled{5} \quad s_{\bar{l}_1}^2 = \frac{s_1^2}{n_1} \quad s_{\bar{l}_2}^2 = \frac{s_2^2}{n_2}$$

Varianzen der Mittelwerte

c) Standardabweichung der Differenz

- Fallunterscheidung: c1) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ Messreihen mit gleicher Genauigkeit
 c2) $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ Messreihen mit möglicherweise ungleicher Genauigkeit

c1) Standardabweichung der Differenz bei gleicher Genauigkeit $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$E(s_1^2) = \sigma_1^2 = E(s_2^2) = \sigma_2^2 = \sigma^2$$

gleiche Genauigkeit

⇒ Schätzwert s^2 für σ^2 wird aus beiden Messreihen gemeinsam berechnet:

$$\textcircled{6} \quad s^2 = \frac{\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2^T \cdot \mathbf{v}_2}{(f_1 + f_2)} = \frac{f_1 \cdot s_1^2 + f_2 \cdot s_2^2}{(f_1 + f_2)}$$

gewichtetes Mittel (s_i^2 für Einzelwerte)

$$\textcircled{7} \quad f = f_1 + f_2$$

Gesamtzahl der Freiheitsgrade

$$E(s^2) = \sigma^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\bar{l}_1}^2 = \frac{\sigma^2}{n_1} \text{ bzw. } \sigma_{\bar{l}_2}^2 = \frac{\sigma^2}{n_2}$$

$$\begin{aligned} d = \bar{l}_2 - \bar{l}_1 &\Rightarrow \sigma_d^2 = \sigma_{\bar{l}_1}^2 + \sigma_{\bar{l}_2}^2 \\ &\Rightarrow \sigma_d^2 = \sigma^2 \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \\ &\Rightarrow \sigma_d = \sigma \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} 1) \quad \boxed{s_d = s \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \quad \text{Varianz der Differenz (Schätzwert } s_d \text{ für } \sigma_d)$$

**c2) Standardabweichung der Differenz bei ungleicher Genauigkeit $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
(„BEHRENS-FISHER-Problem“)**

Für das BEHRENS-FISHER-Problem ist keine strenge Lösung bekannt \Rightarrow Näherungslösung nach WELCH

$$\textcircled{6} 2) \quad \boxed{s_d^2 = s_{\bar{l}_1}^2 + s_{\bar{l}_2}^2} \quad \text{Varianz der Differenz } (s_{\bar{l}_1}^2; s_{\bar{l}_2}^2 \text{ für Mittelwerte)}$$

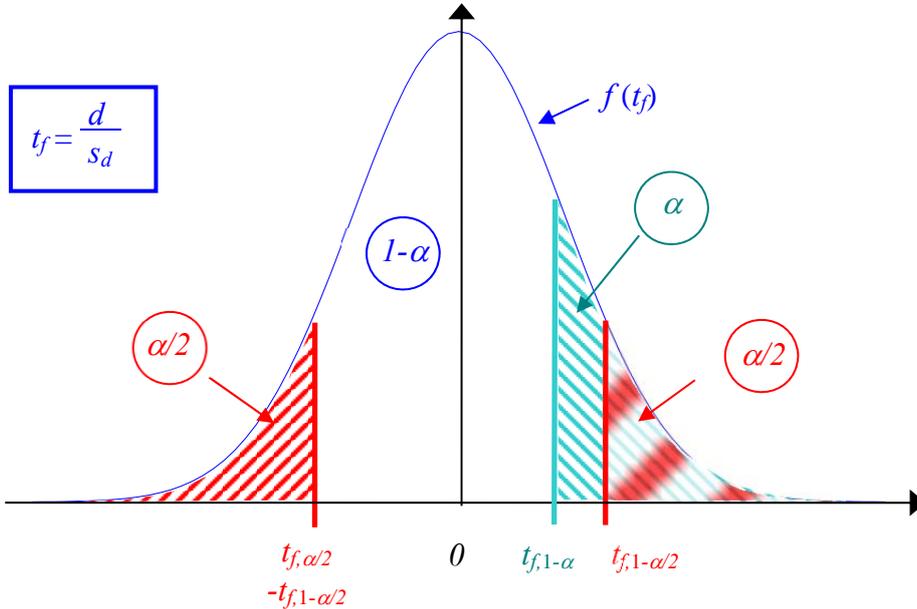
$$\textcircled{7} 1) \quad \boxed{f' = \frac{1}{\frac{c^2}{f_1} + \frac{(1-c)^2}{f_2}} \quad c = \frac{s_{\bar{l}_1}^2}{s_{\bar{l}_1}^2 + s_{\bar{l}_2}^2} \quad f = \text{int}(f')}$$

Gesamtzahl der Freiheitsgrade mit „int(f)“ = Interger (größte ganze Zahl $\leq f$)

d) Testgröße

Ab hier wieder identische Berechnung für beide Fälle

$$\textcircled{9} \quad t = \frac{d}{s_d} \quad H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad t \sim t_f \quad \text{Testgröße folgt } t\text{-Verteilung}$$



- S = (1-α) :** Sicherheitswahrscheinlichkeit
- α :** Irrtumswahrscheinlichkeit einseitig
- 2·(α/2) :** Irrtumswahrscheinlichkeit zweiseitig

	$H_{A1} : \mu_1 < \mu_2$	$H_{A2} : \mu_1 \neq \mu_2$	Bemerkung	Test
	$t = \frac{d}{s_d}$	$t = \frac{d}{s_d}$	Testgröße	
$\textcircled{10}$	$t_{f,1-\alpha}$	$t_{f,1-\alpha/2}$	α vorgeben \Rightarrow Tabelle	
	$t \leq t_{f,1-\alpha}$	$ t \leq t_{f,1-\alpha/2}$	H_0 annehmen	
	$t > t_{f,1-\alpha}$	$ t > t_{f,1-\alpha/2}$	H_0 verwerfen	

9.2.4 Signifikanztest eines Mittelwertes \bar{X} gegen einen Erwartungswert μ_x bei bekannter theoretischer Standardabweichungen $\sigma_{\bar{x}}$

Gegeben: \bar{X} Zufallsgröße
 \bar{x} mit $\sigma_{\bar{x}}$ ($f_{\bar{x}} = \infty$) Realisierung mit ihrer theoretischen Standardabweichung
 μ_x Erwartungswert gegen den \bar{X} zu testen ist

Nullhypothese: $H_0 : E\{\bar{x}\} = \mu_x$ $H_0 : E\{\bar{x}\} - \mu_x = 0$

Alternativhypothesen: $H_{A1} : E\{\bar{x}\} > \mu_x$ $H_{A1} : E\{\bar{x}\} - \mu_x > 0$ einseitige Fragestellung

	$H_{A2} : E\{\bar{x}\} \neq \mu_x$	$H_{A2} : E\{\bar{x}\} - \mu_x \neq 0$	zweiseitige Fragestellung
Testgröße:	$\hat{Y} = \frac{\bar{x} - \mu_x}{\sigma_{\bar{x}}}$		Testgröße folgt Standard-Normal-Verteilung
Quantil:	$Y_{1-\alpha}$	$Y_{1-\frac{\alpha}{2}}$	Aus Tabelle (<i>einseitig</i> $1-\alpha$ bzw. <i>zweiseitig</i> $1-\alpha/2$)
Entscheidung:	$\hat{Y} \leq Y_{1-\alpha} \Rightarrow H_0$ annehmen (H_A verwerfen) $\hat{Y} > Y_{1-\alpha} \Rightarrow H_0$ verwerfen (H_A annehmen)		einseitige Fragestellung
	$ \hat{Y} \leq Y_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow H_0$ annehmen (H_A verwerfen) $ \hat{Y} > Y_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow H_0$ verwerfen (H_A annehmen)		zweiseitige Fragestellung

9.2.5 Signifikanztest eines Mittelwertes \bar{X} gegen einen Erwartungswert μ_x bei unbekannter theoretischer Standardabweichungen $\sigma_{\bar{x}}$

Gegeben: \bar{X} Zufallsgröße
 \bar{x} mit $s_{\bar{x}}$ und $f_{\bar{x}}$ Realisierung mit ihrer empirischen Standardabweichung
 μ_x Erwartungswert gegen den \bar{X} zu testen ist

Nullhypothese:	$H_0 : E\{\bar{x}\} = \mu_x$	$H_0 : E\{\bar{x}\} - \mu_x = 0$	
Alternativhypothesen:	$H_{A1} : E\{\bar{x}\} > \mu_x$	$H_{A1} : E\{\bar{x}\} - \mu_x > 0$	einseitige Fragestellung
	$H_{A2} : E\{\bar{x}\} \neq \mu_x$	$H_{A2} : E\{\bar{x}\} - \mu_x \neq 0$	zweiseitige Fragestellung

Testgröße: $\hat{t} = \frac{\bar{x} - \mu_x}{s_{\bar{x}}}$ $H_0 : t \sim t_f$ Testgröße folgt t -Verteilung

Quantil: $t_{f,1-\alpha}$ $t_{f,1-\frac{\alpha}{2}}$ Aus Tabelle (*einseitig* $1-\alpha$ bzw. *zweiseitig* $1-\alpha/2$)

Entscheidung:	$\hat{t} \leq t_{f,1-\alpha} \Rightarrow H_0$ annehmen (H_A verwerfen) $\hat{t} > t_{f,1-\alpha} \Rightarrow H_0$ verwerfen (H_A annehmen)		einseitige Fragestellung
	$ \hat{t} \leq t_{f,1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow H_0$ annehmen (H_A verwerfen) $ \hat{t} > t_{f,1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow H_0$ verwerfen (H_A annehmen)		zweiseitige Fragestellung

9.3 Signifikanztest für Standardabweichungen

9.3.1 Vergleich zweier empirischer Standardabweichungen

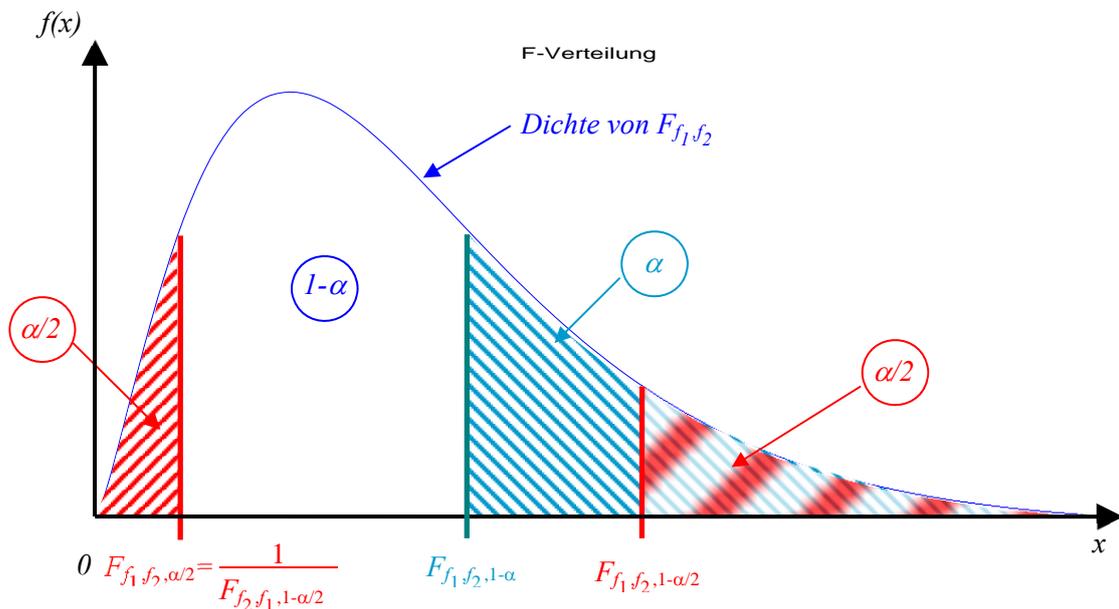
Gegeben: empirische Standardabweichung s_1 mit f_1 Freiheitsgraden
 empirische Standardabweichung s_2 mit f_2 Freiheitsgraden

$$E(s_1^2) = \sigma_1^2 \quad E(s_2^2) = \sigma_2^2$$

Nullhypothese: $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ Testgröße folgt F -Verteilung $H_0 : F \sim F_{f_1, f_2}$

Alternativhypothesen: $H_{A1} : \sigma_1 > \sigma_2$ einseitige Fragestellung
 $H_{A2} : \sigma_1 \neq \sigma_2$ zweiseitige Fragestellung

Testgröße: $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ Reihenfolge $s_1 > s_2$ damit Testgröße $F \geq 1$



S = (1-α) : Sicherheitswahrscheinlichkeit
α : Irrtumswahrscheinlichkeit einseitig
2·(α/2) : Irrtumswahrscheinlichkeit zweiseitig

Die untere Grenze ist zwar als $F_{f_1, f_2, \alpha/2} = \frac{1}{F_{f_2, f_1, 1-\alpha/2}}$ zu berechnen, wegen der Forderung $s_1 > s_2$

(Testgröße $F \geq 1$), ist aber nur die obere Grenze für die Durchführung des Tests von Interesse.

	$H_{A1} : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$H_{A2} : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	Testregel, Bemerkung
Test:	$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$	$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$	Testgröße (mit $s_1 \geq s_2$)
	$F_{f_1, f_2, 1-\alpha}$	$F_{f_1, f_2, 1-\alpha/2}$	α vorgeben \Rightarrow Tabelle
	$F \leq F_{1-\alpha}$	$F \leq F_{1-\alpha/2}$	H_0 annehmen
	$F > F_{1-\alpha}$	$F > F_{1-\alpha/2}$	H_0 verwerfen

9.3.2 Vergleich einer empirischen und einer theoretischen Standardabweichung

Gegeben: empirische Standardabweichung s mit f Freiheitsgraden
theoretische Standardabweichung σ mit ∞ Freiheitsgraden

Anwendung - Test einer empirischen Standardabweichung gegen eine Herstellerangabe
- Vergleich einer „*a priori*“-Aussage mit der „*a posteriori*“-Größe einer Ausgleichung.

Nullhypothese: $H_0 : E(s^2) = \sigma^2$ Testgröße folgt F -Verteilung $H_0 : \hat{F} \sim F_{f_1, f_2}$

Alternativhypothese: $H_A : E(s^2) > \sigma^2$ einseitige Fragestellung bei $s > \sigma$ (sonst umgekehrt)

Testgröße: $\hat{F} = \frac{s^2}{\sigma^2}$ Reihenfolge $s > \sigma$ damit Testgröße $F \geq 1$

Quantil: $F_{f, \infty, 1-\alpha}$ Aus Tabelle bei $s > \sigma$ (sonst Indices ∞, f tauschen)

Entscheidung: $\hat{F} \leq F_{f_1, f_2, 1-\alpha} \Rightarrow H_0$ annehmen
 $\hat{F} > F_{f_1, f_2, 1-\alpha} \Rightarrow H_A$ annehmen

9.4 Signifikanztest für Korrelationskoeffizienten

9.4.1 Test eines Korrelationskoeffizienten — „empirisch, zweiseitig gegen 0“

Empirischer Korrelationskoeffizient, „zweiseitige Fragestellung“ gegen Null

gegeben : r mit f

	$\alpha = 0,05 \hat{=} \text{"signifikant"}$
	$\alpha = 0,01 \hat{=} \text{"hochsignifikant"}$
Hypothesen:	$H_0 : E\{r\} = 0$ bzw. $\rho = 0$ $H_A : E\{r\} \neq 0$ bzw. $\rho \neq 0$
Testgröße:	$ \hat{t} = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{f}}}$ mit $f = n - 2$ bei zwei Meßreihen
Quantil:	$t_{f, 1-\frac{\alpha}{2}}$ Wert der "Student" - Verteilung (z.B. aus Tabelle)
Entscheidung:	$ \hat{t} \leq t_{f, 1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow H_0$ annehmen (H_A verwerfen) $ \hat{t} > t_{f, 1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow H_0$ verwerfen (H_A annehmen)

9.4.2 Test eines Korrelationskoeffizienten — „empirisch, zweiseitig gegen $\rho_0 \neq 0$ “

Empirischer Korrelationskoeffizient, „zweiseitige Fragestellung“ gegen $\rho_0 \neq 0$ bei bekanntem Erwartungswert

gegeben : r mit f

	$\alpha = 0,05 \hat{=} \text{"signifikant"}$
	$\alpha = 0,01 \hat{=} \text{"hochsignifikant"}$
Hypothesen:	$H_0 : E\{r\} = \rho_0$ $H_A : E\{r\} \neq \rho_0$
Testgröße:	$ \hat{Y} = \left \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\ln \frac{1+r}{1-r} - \ln \frac{1+\rho_0}{1-\rho_0} \right)}{\frac{1}{\sqrt{n-3}}} \right $ bzw. bei $\rho_0 = 0$: $ \hat{Y} = \left \frac{\frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+r}{1-r}}{\frac{1}{\sqrt{n-3}}} \right $
Quantil:	$Y_{1-\frac{\alpha}{2}}$ Wert der "Standard - Normalverteilung" (z.B. aus Tabelle)
Entscheidung:	$ \hat{Y} \leq Y_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow H_0$ annehmen (H_A verwerfen) $ \hat{Y} > Y_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow H_0$ verwerfen (H_A annehmen)

9.4.3 Test zweier Korrelationskoeffizienten — „empirisch, zweiseitig“

Empirische Korrelationskoeffizienten, „zweiseitige Fragestellung“ gegeneinander

gegeben: r_1 mit n_1 und r_2 mit n_2

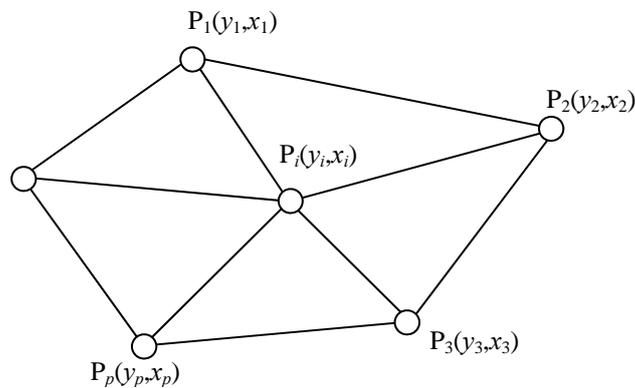
		$\alpha = 0,05 \hat{=} \text{"signifikant"}$
		$\alpha = 0,01 \hat{=} \text{"hochsignifikant"}$
Hypothesen:	$H_0 : E\{r_1\} = E\{r_2\}$ bzw. $\rho_1 = \rho_2$ $H_A : E\{r_1\} \neq E\{r_2\}$ bzw. $\rho_1 \neq \rho_2$	
Testgröße :	$ \hat{Y} = \left \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\ln \frac{1+r_1}{1-r_1} - \ln \frac{1+r_2}{1-r_2} \right)}{\sqrt{\frac{1}{n_1-3} + \frac{1}{n_2-3}}} \right $	
Quantil :	$Y_{1-\frac{\alpha}{2}}$ Wert der "Standard - Normalverteilung" (z.B. aus Tabelle)	
Entscheidung :	$ \hat{Y} \leq Y_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow H_0 \text{ annehmen (} H_A \text{ verwerfen)}$ $ \hat{Y} > Y_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow H_0 \text{ verwerfen (} H_A \text{ annehmen)}$	

9.5 Quadratische Tests mehrdimensionaler Größen (Vektoren)

Gegeben: zwei Vektoren \mathbf{X}_1 und \mathbf{X}_2 mit Ihren Genauigkeitsangaben in Form der zugehörigen Kovarianzmatrizen $\Sigma_{\mathbf{X}\mathbf{X}_1}$ und $\Sigma_{\mathbf{X}\mathbf{X}_2}$, oder der Kofaktormatrizen $\mathbf{Q}_{\mathbf{X}\mathbf{X}_1}$ und $\mathbf{Q}_{\mathbf{X}\mathbf{X}_2}$ inklusive der Standardabweichungen der Gewichtseinheit „a priori“ σ_0 mit $f=\infty$ bzw. „a posteriori“ s_0 mit Freiheitsgraden f_1 und f_2 .

Anwendung: Vergleich der beiden Vektoren \mathbf{X}_1 und \mathbf{X}_2 , ob sie sich signifikant unterscheiden bzw. Test des Differenzvektors $\mathbf{d} = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2$ auf Signifikanz.

Beispiel: Einfache Form der „Deformationsanalyse“, wenn die beiden Vektoren \mathbf{X}_1 und \mathbf{X}_2 die Koordinaten mehrerer Punkte eines Überwachungsnetzes enthalten, die in der Epoche 1 und der Epoche 2 unter identischer Konfiguration gemessen wurden. Voraussetzung ist, dass beider Vektoren \mathbf{X}_1 und \mathbf{X}_2 der gleichen Grundgesamtheit entstammen (gemeinsames σ oder „in einem Guss“ gemeinsam ausgeglichen).



Epoche 1 : $\hat{\mathbf{X}}_1^T = [\hat{y}'_1 \quad \hat{x}'_1 \quad \hat{y}'_2 \quad \hat{x}'_2 \quad \dots \quad \hat{y}'_p \quad \hat{x}'_p]$ mit $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}_1}$ $u,1 \qquad \qquad \qquad u,u$
Epoche 2 : $\hat{\mathbf{X}}_2^T = [\hat{y}''_1 \quad \hat{x}''_1 \quad \hat{y}''_2 \quad \hat{x}''_2 \quad \dots \quad \hat{y}''_p \quad \hat{x}''_p]$ mit $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}_2}$ $u,1 \qquad \qquad \qquad u,u$

Beispiel: Die Vektoren \mathbf{X}_1 und \mathbf{X}_2 enthalten die Koordinaten von p Punkten ($u=2p$)

$\hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_1 \\ \hat{\mathbf{X}}_2 \end{bmatrix}$ mit $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}_1} & \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}_2} \\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}_1}^T & \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}_2} \end{bmatrix}$
--

Beispiel für das Ergebnis einer gemeinsamen Ausgleichung in „einem Guss“ \mathbf{X}_1 und \mathbf{X}_2 sind Subvektoren
 Kofaktormatrizen $\mathbf{Q}_{\mathbf{X}\mathbf{X}_1}$ und $\mathbf{Q}_{\mathbf{X}\mathbf{X}_2}$ sind Submatrizen

Bilden des Differenzvektors $\mathbf{d} = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2$ sowie seiner Genauigkeitsangabe $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}\mathbf{d}}$ mittels FFG:

$\left. \begin{array}{l} \hat{\mathbf{X}}_1 \text{ mit } \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}_1} \\ \hat{\mathbf{X}}_2 \text{ mit } \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}_2} \end{array} \right\}$	$\Rightarrow \mathbf{d} = \hat{\mathbf{X}}_1 - \hat{\mathbf{X}}_2 \text{ mit } \mathbf{Q}_{\mathbf{d}\mathbf{d}} = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}_1} + \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}_2} - \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}_1\hat{\mathbf{X}}_2} - \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}_2\hat{\mathbf{X}}_1}$
---	---

9.5.1 Test quadratischer Form — theoretisch (bei σ_0^2)

Bei dem Beispiel einer einfachen Deformationsanalyse ist davon auszugehen, dass die Vektoren \mathbf{X}_1 und \mathbf{X}_2 einer freien Netzausgleichung unterzogen werden und somit Singularitäten zu befürchten sind. In einem solchen Falle wird die Pseudoinverse \mathbf{Q}_{dd}^+ statt der Inversen \mathbf{Q}_{dd}^{-1} zu bilden sein.

Hypothesen:	$\mathbf{H}_0 : E\{\mathbf{d}\} = \mathbf{0}$ $\mathbf{H}_A : E\{\mathbf{d}\} \neq \mathbf{0}$	$\alpha = 0,05 \hat{=} \text{"signifikant"}$ $\alpha = 0,01 \hat{=} \text{"hochsignifikant"}$
Testgröße:	$\hat{\chi}^2 = \frac{\mathbf{d}^T \cdot \mathbf{Q}_{dd}^+ \cdot \mathbf{d}}{\sigma_0^2}$	
Quantil:	$\chi_{q,1-\alpha}^2$ Wert der "Chi - quadrat - Verteilung" mit $q = \text{Rg}(\mathbf{Q}_{dd}^+) = u-d$ (z.B. aus Tabelle)	
Entscheidung:	$\hat{\chi}^2 \leq \chi_{q,1-\alpha}^2 \Rightarrow \mathbf{H}_0$ annehmen (\mathbf{H}_A verwerfen) $\hat{\chi}^2 > \chi_{q,1-\alpha}^2 \Rightarrow \mathbf{H}_0$ verwerfen (\mathbf{H}_A annehmen)	

Wenn \mathbf{Q}_{dd} regulär ist, wird statt mit \mathbf{Q}_{dd}^+ direkt mit \mathbf{Q}_{dd}^{-1} gerechnet

9.5.2 Test quadratischer Form — empirisch (bei s_0^2, f_1 und f_2)

Bei dem Beispiel einer einfachen Deformationsanalyse ist davon auszugehen, dass die Vektoren \mathbf{X}_1 und \mathbf{X}_2 einer freien Netzausgleichung unterzogen werden und somit Singularitäten zu befürchten sind. In einem solchen Falle wird die Pseudoinverse \mathbf{Q}_{dd}^+ statt der Inversen \mathbf{Q}_{dd}^{-1} zu bilden sein.

Hypothesen:	$\mathbf{H}_0 : E\{\mathbf{d}\} = \mathbf{0}$ $\mathbf{H}_A : E\{\mathbf{d}\} \neq \mathbf{0}$	$f = f_1 + f_2$ $s_0^2 = \frac{s_{0_1}^2 \cdot f_1 + s_{0_2}^2 \cdot f_2}{f}$
Testgröße:	$\hat{F} = \frac{\mathbf{d}^T \cdot \mathbf{Q}_{dd}^+ \cdot \mathbf{d}}{q \cdot s_0^2}$	$\alpha = 0,05 \hat{=} \text{"signifikant"}$ $\alpha = 0,01 \hat{=} \text{"hochsignifikant"}$
Quantil:	$F_{q,f,1-\alpha}$ Wert der "Fisher - Verteilung" mit $q = \text{Rg}(\mathbf{Q}_{dd}^+) = u-d$ (z.B. aus Tabelle)	
Entscheidung:	$\hat{F} \leq F_{q,f,1-\alpha} \Rightarrow \mathbf{H}_0$ annehmen (\mathbf{H}_A verwerfen) $\hat{F} > F_{q,f,1-\alpha} \Rightarrow \mathbf{H}_0$ verwerfen (\mathbf{H}_A annehmen)	

Wenn \mathbf{Q}_{dd} regulär ist, wird statt mit \mathbf{Q}_{dd}^+ direkt mit \mathbf{Q}_{dd}^{-1} gerechnet